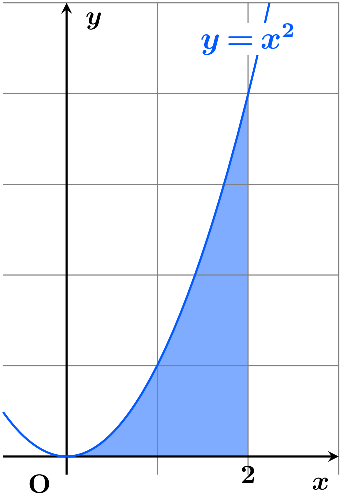
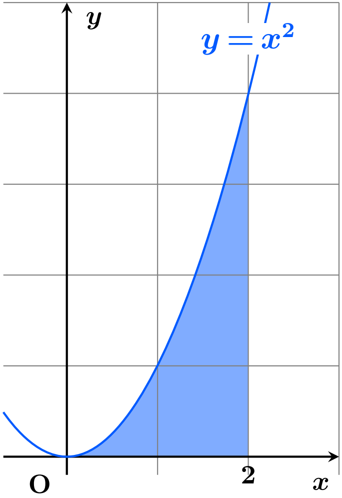
$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



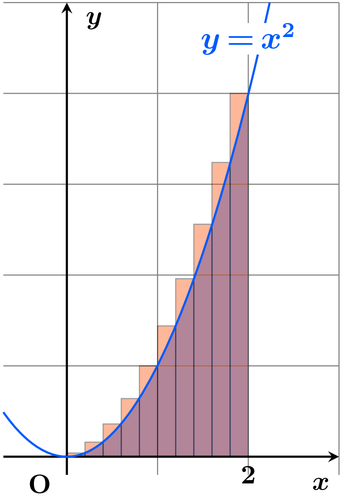
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2\,dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

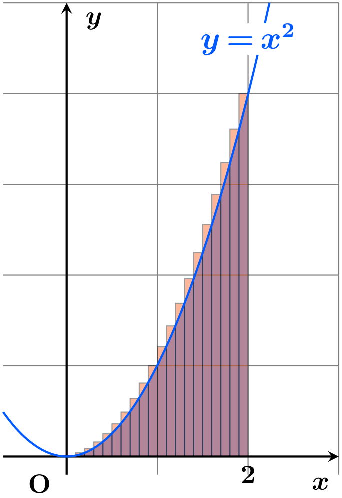
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2\,dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

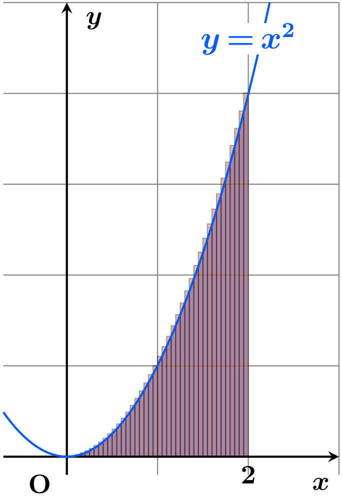
$y=x^2$，$x=2$，x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2\,dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

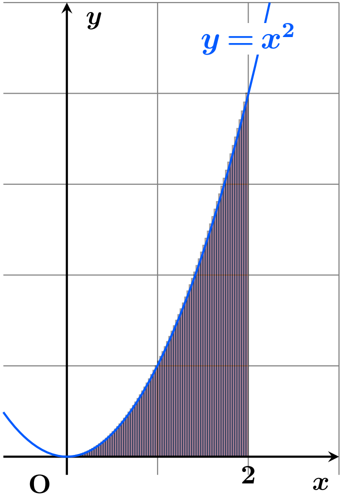
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2\,dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

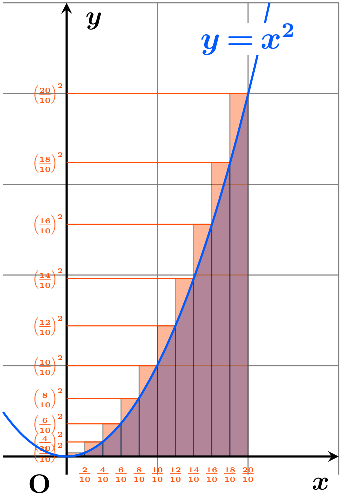
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



積分 $\int_0^2 x^2\,dx$ を計算するのがベストですが、今回は**区分求積法**で解いてみましょう。

長方形の幅を小さくしていき、面積を求めます。

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



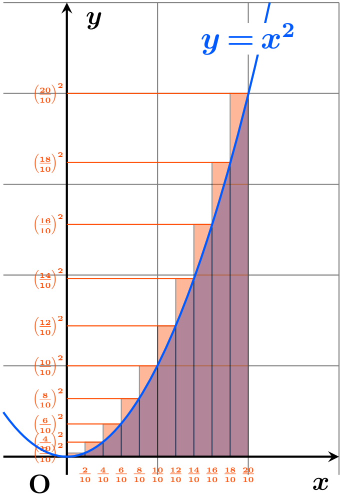
10 分割したとき、長方形の横幅はすべて $\frac{2}{10}$ です。それぞれの高さは

$$\left(\frac{2}{10}\right)^2, \left(\frac{4}{10}\right)^2, \left(\frac{6}{10}\right)^2, \left(\frac{8}{10}\right)^2, \left(\frac{10}{10}\right)^2$$

$$\left(\frac{12}{10}\right)^2, \left(\frac{14}{10}\right)^2, \left(\frac{16}{10}\right)^2, \left(\frac{18}{10}\right)^2, \left(\frac{20}{10}\right)^2$$

となります。

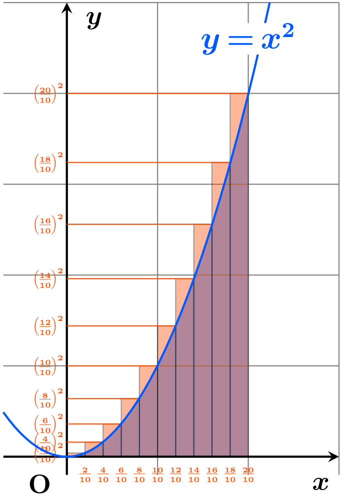
$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



面積の総和は次のとおりです。

$$\left(\frac{2}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{4}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{8}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{10}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{12}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{14}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{16}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{18}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{20}{10}\right)^2 \times \frac{2}{10}$$

$y=x^2$，$x=2$，x 軸で囲まれる部分の面積？

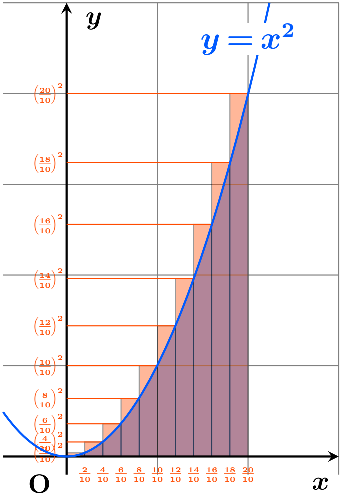


$\dfrac{2}{10}$ でくくると

$$\frac{2}{10}\left(\left(\frac{2}{10}\right)^2+\left(\frac{4}{10}\right)^2+\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2+\left(\frac{10}{10}\right)^2+\left(\frac{12}{10}\right)^2+\left(\frac{14}{10}\right)^2 + \left(\frac{16}{10}\right)^2+\left(\frac{18}{10}\right)^2+\left(\frac{20}{10}\right)^2\right)$$

となります。

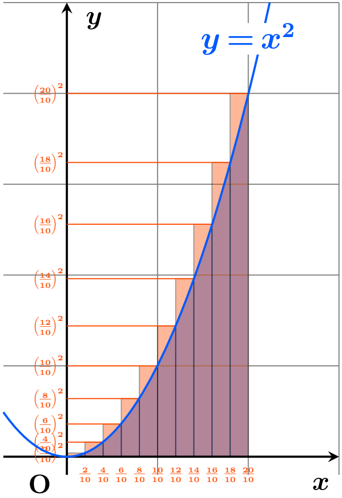
$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



$\sum$ を使って表すと

$\frac{2}{10}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{2k}{10}\right)^2$ となります。

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？



$\sum$ を使って表すと

$\dfrac{2}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\dfrac{2k}{10}\right)^2$ となります。

n 分割したときは

$\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2k}{n}\right)^2$ となります。n をどんどん大きくすれば求める面積となります。

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$$

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2}$$

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2}$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2}$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

公式 $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を代入して

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$= \frac{8}{n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

n をどんどん大きくすればいいので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)}{\frac{3n^2}{n^2}}$$

$y=x^2$, $x=2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)}{\frac{3n^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3}$$

$$= \frac{4\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(2+\frac{1}{\infty}\right)}{3}$$

$y = x^2$, $x = 2$, x 軸で囲まれる部分の面積？

$$= \frac{4\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(2+\frac{1}{\infty}\right)}{3}$$

$$= \frac{4(1+0)(2+0)}{3}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 2}{3} \qquad = \frac{8}{3} \quad \boxed{答}$$

面積を求める方法の歴史

区分求積法（極限を使って面積を求める方法）は古くから長年使われていた方法でしたが、17 世紀に考案された積分法の方が簡単に答えが出せるので、主役の座を譲りました。

積分法で解くと…

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

答

衝撃的だった微分積分法

あっ　と言う間に答えが出ますね。

普通、高校の教科書では簡単に答えが出る積分法を学習した後で、計算が少し面倒な区分求積法を学びますが、数学の歴史と逆なのです。