$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つよう定数 a, b の値を定めなさい

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\text{定数}\ ,\quad \lim_{x\to a}g(x)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=0$$

を使う。

$x\to a$ のとき 分母 $\to 0$ なので、分子 $\to 0$ でないと極限値が定まらない。

$\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つよう定数 a, b の値を定めなさい

$\displaystyle\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)=\sqrt{4}-2=2-2=0$ なので【分母 $\to 0$ なので】

$\displaystyle\lim_{x\to 4}(ax+b)=0$ でないと【分子 $\to 0$ でないと】極限値が定まらない。

だから　$\displaystyle\lim_{x\to 4}(ax+b)=0$　を計算します。

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つよう定数 a, b の値を定めなさい

$\displaystyle\lim_{x\to4}(ax+b)=4a+b=0$　より　$b=-4a$　一旦停止

これを問題の式に代入して

$$\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{ax-4a}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{a(x-4)}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{a(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

有理化

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つよう定数 a, b の値を定めなさい

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to4}\frac{a(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to4}\frac{a(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\
&= \lim_{x\to4} a(\sqrt{x}+2) \\
&= a(\sqrt{4}+2) \quad = 4a
\end{aligned}
$$

問題文に $=12$ と書かれているので $4a=12$ となって

$a=3$ 答

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つよう定数 a, b の値を定めなさい

$b=-4a$ だったので $a=3$ を代入して $b=-12$ ㊟

答 $a=3,\ b=-12$