$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

部分分数に分ける

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$ なので

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}$$

一旦停止

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ の和を求めなさい

よって
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{\infty+1}$$
$$= 1 - 0 = 1$$ 答