

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の第  $n$  項までの部分 and を  $S_n$  とすると

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の第  $n$  項までの部分和を  $S_n$  とすると

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

部分分数に分ける

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の第  $n$  項までの部分和を  $S_n$  とすると

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{なので}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の第  $n$  項までの部分和を  $S_n$  とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{一旦停止} \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  の和を求めなさい

よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\infty + 1} \\ &= 1 - 0 = 1 \quad \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$