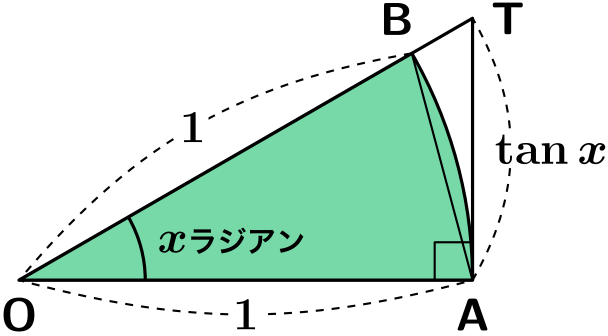
$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証明します

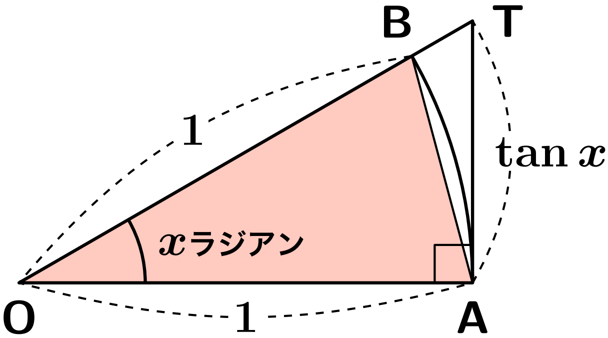
$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、下の図において面積は

△OAB < 扇形 OAB < △OAT となる。



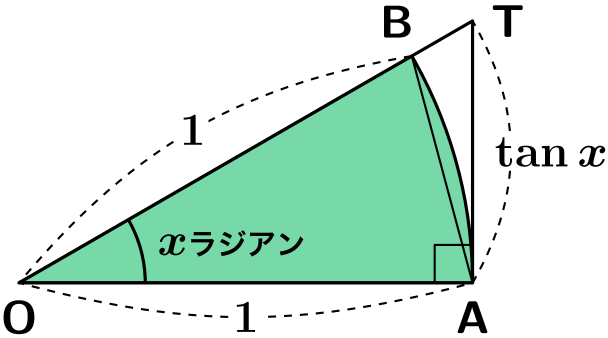
△OAB の面積は

三角形の面積公式 web $= \dfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x$ 一旦停止



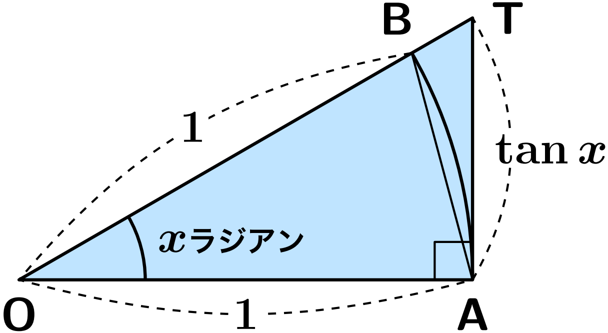
扇形 OAB の面積は

扇形の面積 ▸web $= \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot$ 弧 $\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1x$ 一旦停止



△OAT の面積は

$\dfrac{1}{2}$・底辺 OA・高さ AT $= \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$ 一旦停止



$\triangle$OAB $<$ 扇形 OAB $<$ $\triangle$OAT に代入

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin x \quad < \quad \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x \quad < \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

各辺 $\times 2$ して

$$\sin x \quad < \quad x \quad < \quad \tan x$$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので

$$\sin x \quad < \quad x \quad < \quad \frac{\sin x}{\cos x}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $\sin x > 0$ だから

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

各辺 $\div \sin x$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

逆数にすると大小関係が逆になって

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

各辺の $\displaystyle\lim_{x\to+0}$ をとると (極限をとった時点で $>$ → $\geqq$ となります)

$$\lim_{x\to+0} 1 \geqq \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} \geqq \lim_{x\to+0}\cos x$$

極限を計算

$$\lim_{x\to+0} 1 \geqq \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \geqq \lim_{x\to+0} \cos x$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} \cos x = 1$ なので

$$1 \geqq \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \geqq 1$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 一旦停止

はさみうちの原理

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のときはこうなる

$\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x}$ において $x = -\theta$ とおくと

$x \to -0$ のとき $\theta \to +0$ となるので

x が $-0.1, -0.01, \cdots$ と 0 に近づくとき
θ は $0.1, 0.01, \cdots$ と 0 に近づくことになるので

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

$-\frac{\pi}{2}<x<0$ のときはこうなる

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ なので

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{-\sin\theta}{-\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

一旦停止

証明に頭がついてくる人は少ないと思う

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき

共に成り立つので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$ （証明終わり）

自分も高校生の頃は頭がついていかなかったなぁ…

【補足】lim をとると $>$ → $\geqq$ について

反比例のグラフ $y=\dfrac{1}{x}$ を知っていれば

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ が分かると思う。

しかし $y=\dfrac{1}{x}$ において $y=0$ となることはない。

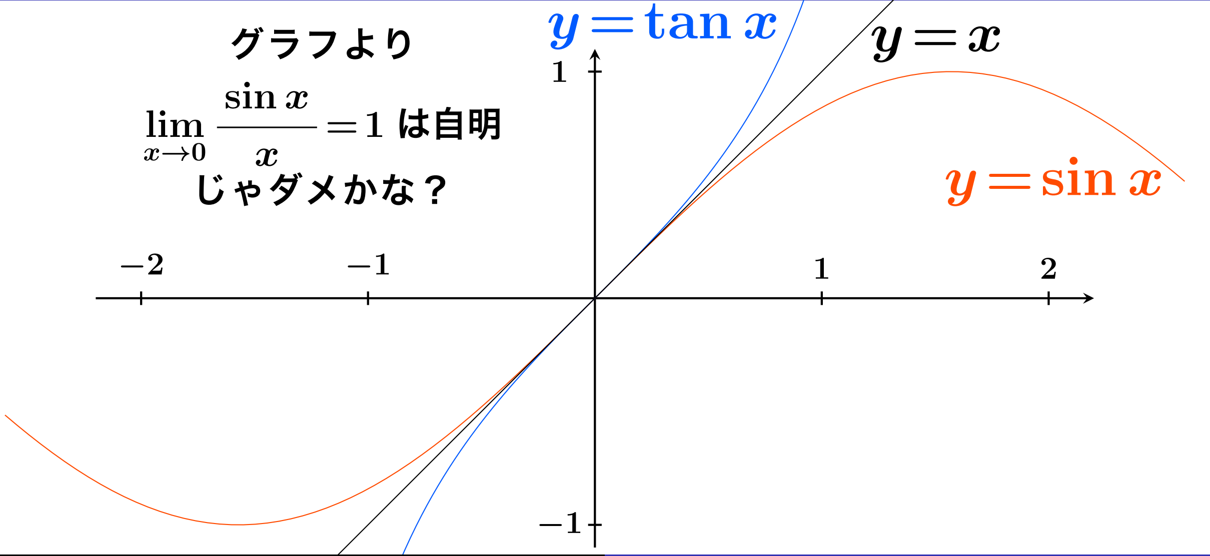
【補足】lim をとると $>$ → $\geqq$ について

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ とは、$x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は 0 に近づいていくことを表している（0 にはならない）

だから lim をとるときはぴったりとその値にならなくても近づいていくならば $=$ を使うのだ。

という説明で納得してもらえるだろうか？

$y = x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$ のグラフ



グラフより

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ は自明

じゃダメかな？

$y = \dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ