静岡大・理・工・情報，2000 年前期

関数 $f(x)$, $g(x)$ を下記のように定義するとき、次の問いに答えよ。

$$f(x)=\begin{cases} x^4-x^2+6 & (\ |x|\leqq 1\ ) \\ \dfrac{12}{|x|+1} & (\ |x|>1\ ) \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+\frac{7}{2} \qquad (\ |x|\leqq 2\ )$$

(1) $f(x)$, $g(x)$ の増減を調べ、2 曲線 $C_1: y=f(x)$, $C_2: y=g(x)$ のグラフの概形を同じ座標平面上にかけ。

(2) C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

$y=x^4-x^2+6 \quad (\ |x| \leqq 1\ )$

このグラフは y 軸対称なので $0 \leqq x \leqq 1$ を調べる。

$y' = 4x^3 - 2x = 2x\,(2x^2-1)$ なので
$y' = 0$ とおくと $x = 0,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ となって
区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では $x = 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ になる。

$y' = 4x^3 - 2x$

$y'' = 12x^2 - 2 = 2\left(6x^2 - 1\right)$ なので

$y'' = 0$ とおくと $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ となって

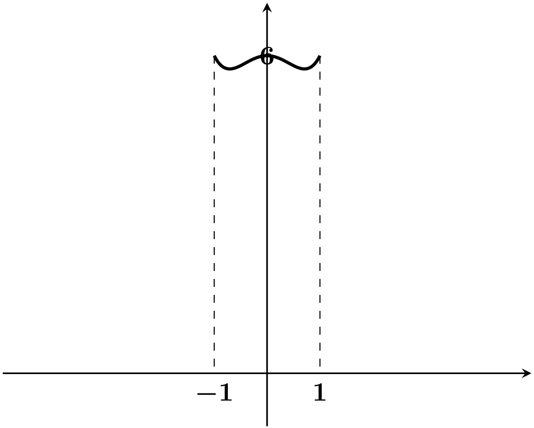
区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ になる。

$y = x^4 - x^2 + 6 \quad (\ |x| \leqq 1 \ )$

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
y'	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$
y''	$\frown$	$\frown$	0	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$
y	6	$\searrow$	$\frac{211}{36}$	$\searrow$	$\frac{23}{4}$	$\nearrow$	6

y 軸対称なので、グラフは右のとおり



$y=\frac{12}{|x|+1}\quad(\ |x|>1\ )$

このグラフは y 軸対称なので $x>1$ を調べる。

$x>1$ のときは $y=\frac{12}{x+1}$ なので分数関数だから
$y=\frac{1}{x}$ と似たグラフになる。

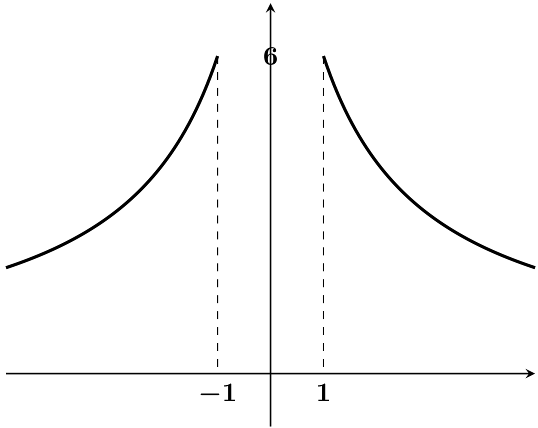
$x=1$ のとき $y=6$ で、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x+1}=0$ だから

$$y=\frac{12}{|x|+1} \quad (\ |x|>1 \ )$$

$x=1$ のとき $y=6$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x+1}=0$$

y 軸対称なので、グラフは右のとおり



$y=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+\frac{7}{2}$ （ $|x|\leqq 2$ ）

$y=\cos x$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍、x 軸方向に $\frac{1}{2\pi}$ 倍して y 軸方向に $\frac{7}{2}$ だけ平行移動したものである。

$x=0$ のとき $y=4$ で
$x=2$ のときも $y=4$ なので

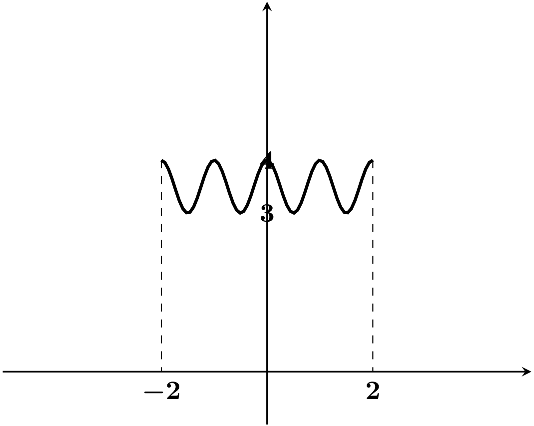
$y=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+\frac{7}{2}\quad (\ |x|\leqq 2\ )$

$y=\cos x$ のグラフを

y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍、x 軸方向に $\dfrac{1}{2\pi}$ 倍して

y 軸方向に $\dfrac{7}{2}$ だけ平行移動

$x=0,2$ のとき $y=4$



静岡大・理・工・情報，2000 年前期，富士山

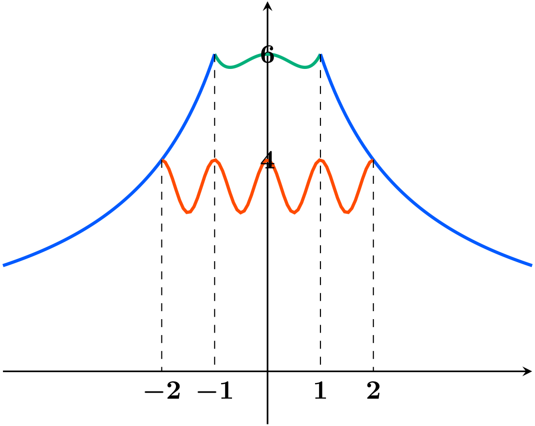
関数 $f(x)$, $g(x)$ を下記のように定義するとき、次の問いに答えよ。

$$f(x)=\begin{cases} x^4-x^2+6 & (\ |x|\leqq 1\ ) \\ \dfrac{12}{|x|+1} & (\ |x|>1\ ) \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+\frac{7}{2} \qquad (\ |x|\leqq 2\ )$$

(1) $f(x)$, $g(x)$ の増減を調べ、2 曲線 $C_1 : y=f(x)$, $C_2 : y=g(x)$ のグラフの概形を同じ座標平面上にかけ。

(2) C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。



C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ

y 軸について左右対称なので $0 \leqq x \leqq 2$ の面積を2倍すればよい。

$0 \leqq x \leqq 1$ では

㊤ $x^4 - x^2 + 6$　　㊦ $\frac{1}{2}\cos 2\pi x + \frac{7}{2}$

$1 \leqq x \leqq 2$ では

㊤ $\frac{12}{|x|+1}$　　㊦ $\frac{1}{2}\cos 2\pi x + \frac{7}{2}$

C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ

$$\int_0^1 \left(x^4 - x^2 + 6 - \left(\tfrac{1}{2}\cos 2\pi x + \tfrac{7}{2}\right)\right) dx$$
$$+ \int_1^2 \left(\frac{12}{|x|+1} - \left(\tfrac{1}{2}\cos 2\pi x + \tfrac{7}{2}\right)\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^4 - x^2 + 6 - \frac{1}{2}\cos 2\pi x - \frac{7}{2}\right) dx$$
$$+ \int_1^2 \left(\frac{12}{|x|+1} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x - \frac{7}{2}\right) dx$$

C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ

$$= \int_0^1 \left(x^4 - x^2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right) dx$$

$$+ \int_1^2 \left(\frac{12}{|x|+1} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x - \frac{7}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1$$

$$+ \left[12\log\big||x|+1\big| - \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x - \frac{7}{2}x\right]_1^2$$

C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ

$$
\begin{aligned}
= &\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5-\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{5}{2}\cdot 1-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\cdot 1\right)\\
&-\left(\frac{1}{5}\cdot 0^5-\frac{1}{3}\cdot 0^3+\frac{5}{2}\cdot 0-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\cdot 0\right)\\
&+\left(12\log\left||2|+1\right|-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\cdot 2-\frac{7}{2}\cdot 2\right)\\
&-\left(12\log\left||1|+1\right|-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\cdot 1-\frac{7}{2}\cdot 1\right)
\end{aligned}
$$

C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 0 \\
&\qquad + 12\log 3 - 7 - 12\log 2 + \frac{7}{2} \\
&= -\frac{17}{15} + 12\log 3 - 12\log 2 \\
&= -\frac{17}{15} + 12(\log 3 - \log 2) \\
&= -\frac{17}{15} + 12\log\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

一旦停止

求める面積はこれの 2 倍だから

C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ

$$2\left(-\frac{17}{15}+12\log\frac{3}{2}\right) = -\frac{34}{15}+24\log\frac{3}{2}$$ 答

♻ 参考 URL

https://waka-blog.com/?p=1837 ▸ web

正解にたどり着いた受験生はいたのだろうか…