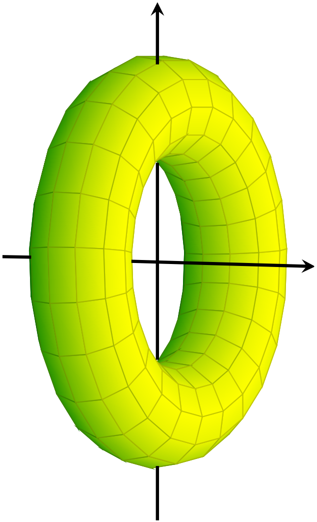
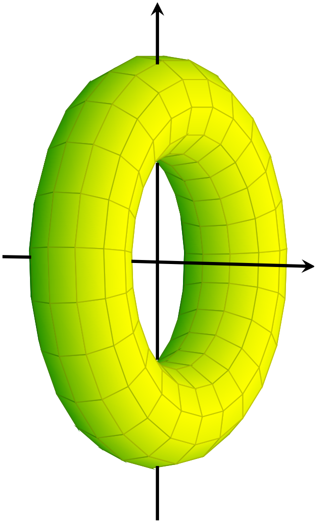
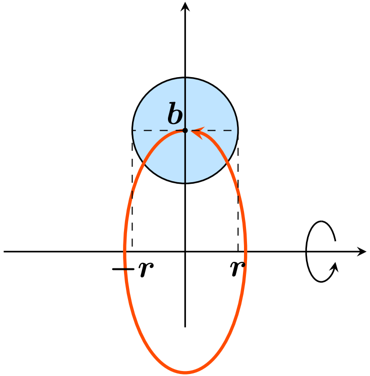
$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？



トーラス（円環体）



$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？



半径 r の円なので面積は πr^2 で、

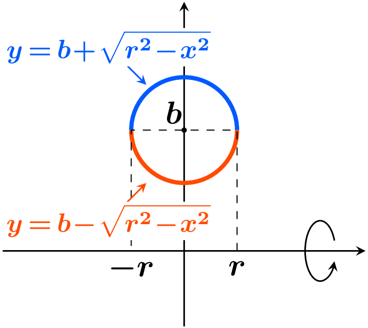
軸のまわりに 1 回転すると円の中心（重心）は、半径 b の円周の長さを移動することになるので $2b\pi$ となります。

だから回転体の体積は

$\pi r^2 \times 2b\pi = 2\pi^2 br^2$ と計算できます。

※ 楽する方法を知っていると有利！

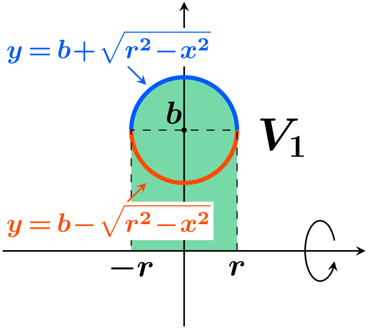
$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？



積分で計算すると

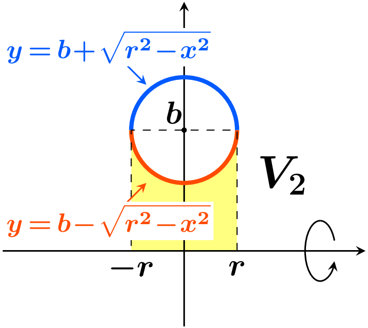
$$
\begin{aligned}
x^2+(y-b)^2 &= r^2\\
(y-b)^2 &= r^2-x^2\\
y-b &= \pm\sqrt{r^2-x^2}\\
y &= b\pm\sqrt{r^2-x^2}
\end{aligned}
$$

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？



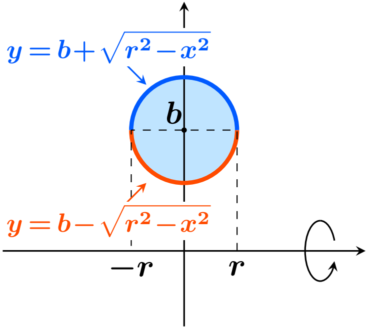
$y=b+\sqrt{r^2-x^2}$, x 軸，$x=r$, $x=-r$ に囲まれた図形を、x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 とする。

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？



$y=b-\sqrt{r^2-x^2}$, x 軸，$x=r$, $x=-r$ に囲まれた図形を、x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする。

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？



求める体積 $V=V_1-V_2$ なので

$$\pi\int_{-r}^{r}\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$
$$-\ \pi\int_{-r}^{r}\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

を計算すればよい。

※ $x:0\to r$ を 2 倍しても良いけど、教科書にこう書かれていた

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$
\begin{aligned}
&\pi\int_{-r}^{r}\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-r}^{r}\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx\\
=\ &\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right)dx\\
=\ &\pi\int_{-r}^{r}\Big(\left(b^2+2b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)\\
&\qquad\qquad-\ \left(b^2-2b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)\Big)dx\\
=\ &\pi\int_{-r}^{r}\Big(b^2+2b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\\
&\qquad\qquad-\ b^2+2b\sqrt{r^2-x^2}-r^2+x^2\Big)dx
\end{aligned}
$$

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$
\begin{aligned}
&= \pi\int_{-r}^{r}\Bigl(b^2+2b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2 \\
&\qquad\qquad -\ b^2+2b\sqrt{r^2-x^2}-r^2+x^2\Bigr)dx \\
&= \pi\int_{-r}^{r}4b\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= 4\pi b\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$= \ 4\pi b\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x=r\sin\theta$ とおいて置換積分する。$\dfrac{dx}{d\theta}=r\cos\theta$ なので

$dx=r\cos\theta\,d\theta$ で、$x:-r\to r$ のとき $\theta:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$ となるから

$$= \ 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-(r\sin\theta)^2}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$$= \ 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$= 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2(1-\sin^2\theta)}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$= 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2\cos^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$= 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot r\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi b r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

2 倍角公式（半角公式）

$$= 2\pi b r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

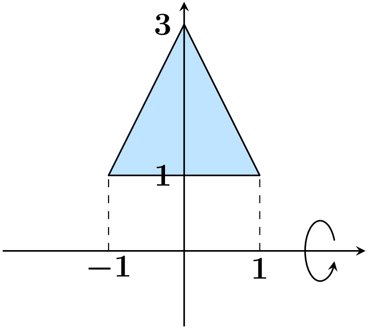
$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi b r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= 2\pi b r^2 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi b r^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)\right) \\
&= 2\pi b r^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$0<r<b$ で $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転した体積？

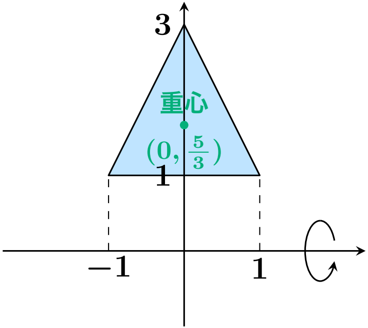
$$
\begin{aligned}
&= 2\pi b r^2\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right)\\
&= 2\pi b r^2\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right)\right)\\
&= 2\pi b r^2\cdot \qquad \pi\\
&= 2\pi^2 b r^2 \quad \boxed{答}
\end{aligned}
$$

x 軸のまわりに 1 回転した体積？



左図の三角形に囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転した体積を求めると $\frac{20}{3}\pi$ となることを確かめなさい。

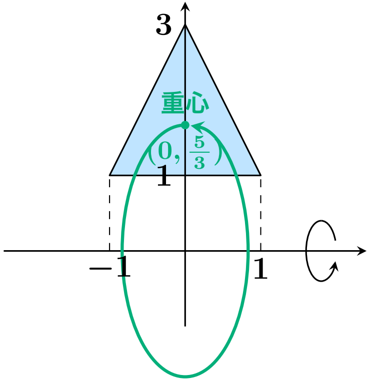
x 軸のまわりに 1 回転した体積？



三角形の頂点は $(1,1), (-1,1), (0,3)$ なので、重心は $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$ となる。

https://unilab.gbb60166.jp/prekou/pdf/m2-jushin.pdf ▸ web

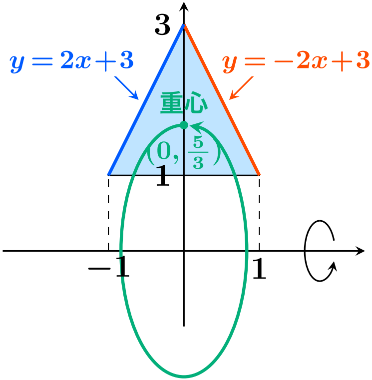
x 軸のまわりに 1 回転した体積？



三角形の面積は 2 で、重心の移動距離は $\frac{10}{3}\pi$ となるので、求める体積は

$$2 \times \frac{10}{3}\pi = \frac{20}{3}\pi \quad \boxed{\text{答}}$$

x 軸のまわりに 1 回転した体積？



積分で計算する。

$x:-1\to 0$ と $x:0\to 1$ の回転体の体積は等しいので、$x:0\to 1$ の体積を 2 倍すればよいので

$$2\left(\pi\int_0^1(-2x+3)^2dx-\pi\int_0^1 1dx\right)$$

を計算すればよい。

x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$
\begin{aligned}
& 2\left(\pi\int_0^1(-2x+3)^2dx-\pi\int_0^1 1dx\right)\\
=\ & 2\left(\pi\int_0^1(4x^2-12x+9)dx-\pi\int_0^1 1dx\right)\\
=\ & 2\pi\int_0^1\Big((4x^2-12x+9)-1\Big)dx\\
=\ & 2\pi\int_0^1(4x^2-12x+8)dx\\
=\ & 2\pi\left[\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x\right]_0^1
\end{aligned}
$$

x 軸のまわりに 1 回転した体積？

$$= 2\pi\left[\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{4}{3}\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 8\cdot 1\right) - \left(\frac{4}{3}\cdot 0^3 - 6\cdot 0^2 + 8\cdot 0\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{4}{3} - 6 + 8\right) \quad = 2\pi\left(\frac{4}{3} + 2\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{4}{3} + \frac{6}{3}\right) \quad = 2\pi\cdot\frac{10}{3} \quad = \frac{20}{3}\pi$$ 答

パップス・ギュルダンの定理 ▸web

○△□ならともかく、複雑な図形になると重心を求めるのは難しくなるので使える場面はそう多くはないと思いますが、知っておくと役に立つことがあるはずです。