次の確率を求めなさい

問題

A,B が 1 個ずつさいころを投げる。

両方とも奇数なら A の勝ち、
それ以外は B の勝ちとする。

3 ゲーム先取で優勝のとき、次の確率を求めなさい。

(1)　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

(1)　4ゲーム目でAの優勝が決まる確率？

$\boxed{\text{4ゲーム目でAの優勝が決まる}} = \boxed{\text{3ゲーム目までで A が 2 勝 1 敗}}$ で $\boxed{\text{4ゲーム目でAが勝つ}}$

というパターンしかない。

(1)　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

まず A が勝つ確率を考える。「両方とも奇数なら A の勝ち」と問題文に書かれていた。

さいころの目で奇数は $1, 3, 5$ の 3 通りなので

奇数・奇数となる確率（A が勝つ確率）は
$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ となる。

(1)　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

A が勝つ確率が $\frac{1}{4}$ なので、

A が負ける確率は $\frac{3}{4}$ となる。

※ このような不公平なゲームはすべきではないが、計算練習のため意図的にこのようにしているので悪しからず

⑴　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

だから 3 ゲーム目までで A が 2 勝 1 敗となる確率は、反復試行の公式を使って

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\begin{array}{c} \text{A の} \\ \text{勝つ} \\ \text{確率} \end{array} \right)^2 \left(\begin{array}{c} \text{A の} \\ \text{負ける} \\ \text{確率} \end{array} \right)^1 $$

(1)　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

だから 3 ゲーム目までで A が 2 勝 1 敗となる確率は、反復試行の公式を使って

$$ {}_{3}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} $$

(1)　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

最初に戻って

$$\boxed{\text{4 ゲーム目で A の優勝が決まる}} = \boxed{\text{3 ゲーム目までで A が 2 勝 1 敗}} \times \boxed{\text{4 ゲーム目で A が勝つ}}$$

$$= {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \frac{1}{4}$$

(1)　4 ゲーム目で A の優勝が決まる確率？

$$
{}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1}{4}
$$

$$
=\frac{3\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times 1}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}
$$

$$
=\frac{9}{256}
$$

答

⑵　A が優勝する確率？

⑵　A が優勝する確率？

$\boxed{\text{A が優勝する}} = \boxed{\text{3 ゲーム目で優勝}} + \boxed{\text{4 ゲーム目で優勝}} + \boxed{\text{5 ゲーム目で優勝}}$

というパターンがある。（この 3 つは同時には起こらないので、たし算することになる）
【4 ゲーム目で優勝】はさっき計算したので $\dfrac{9}{256}$

⑵　A が優勝する確率？

A が【3 ゲーム目で優勝】のパターンは 3 連勝すればよい。

A が勝つ確率は $\frac{1}{4}$ なので

⑵　A が優勝する確率？

$$\boxed{\text{3 ゲーム目で優勝}} = \boxed{\text{1 ゲーム目勝つ}} \times \boxed{\text{2 ゲーム目勝つ}} \times \boxed{\text{3 ゲーム目勝つ}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{64}$$

一旦停止

(2)　A が優勝する確率？

【5 ゲーム目で優勝】のパターンは

$$\boxed{\text{5 ゲーム目で優勝}} = \boxed{\text{4 ゲーム目までで A が 2 勝 2 敗}} \times \boxed{\text{5 ゲーム目で A が勝つ}}$$

$$= {}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{27}{512}$$

一旦停止

(2)　A が優勝する確率？

最初に戻って

$$\boxed{\text{A が優勝する}} = \boxed{\text{3 ゲーム目で優勝}} + \boxed{\text{4 ゲーム目で優勝}} + \boxed{\text{5 ゲーム目で優勝}}$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{9}{256} + \frac{27}{512}$$

$$= \frac{53}{512}$$ 答