

## 次の式を満たす整数解の組は何通りある？

$$(1) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$(2) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$$

$$(3) \quad x + y + z \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$(1) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

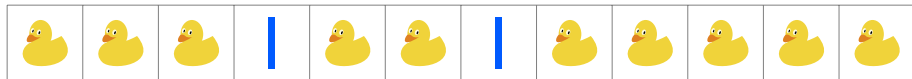
$x, y, z$  は整数なので 🦆 10 個 と | 2 個  
の合計 12 個の並べ方を数えればよい。

---

例えば 🦆🦆🦆 | 🦆🦆 | 🦆🦆🦆🦆🦆 のときは  
 $x = 3, y = 2, z = 5$  となり ( $x$  個数 |  $y$  個数 |  $z$  個数 )

| 🦆🦆🦆 | 🦆🦆🦆🦆🦆🦆 のときは  
 $x = 0, y = 3, z = 7$  に対応する。

$$(1) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$



12 カ所の中の 10 カ所にを入れて  $({}_{12}C_{10})$   
残りに|を入れればよい

$$\boxed{\text{答}} \quad {}_{12}C_{10} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 66 \text{ 通り}$$

${}_{12}C_2$  でもよい

$$(1) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

(別解) この程度なら地道に数えてもよいかも…

|              |                       |                       |          |
|--------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| $x = 0$ のとき  | $y = 10, 9, \dots, 0$ | $z = 0, 1, \dots, 10$ | の 11 組   |
| $x = 1$ のとき  | $y = 9, 8, \dots, 0$  | $z = 0, 1, \dots, 9$  | の 10 組   |
| $x = 2$ のとき  | $y = 8, 7, \dots, 0$  | $z = 0, 1, \dots, 8$  | の 9 組    |
| $\vdots$     | $\vdots$              | $\vdots$              | $\vdots$ |
| $x = 10$ のとき | $y = 0$               | $z = 0$               | の 1 組    |

$$\text{よって } 1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{\text{公式/等差数列の和}}{2} = \frac{11(1+11)}{2} = 66 \text{ 通り } \boxed{\text{答}}$$

$$(2) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$$

最初に  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$  としておいて  
残りの 🐣 7 個 と | 2 個  
の合計 9 個の並べ方を数えればよい。

---

例えば 🐣🐣🐣🐣🐣 | 🐣 | 🐣 のときは  
 $x = 5 + 1 = 6$ ,  $y = 1 + 1 = 2$ ,  $z = 1 + 1 = 2$   
に対応する。

$$(2) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$$

| 🎓🎓🎓🎓 | 🎓🎓🎓 のときは

$$x = 0 + 1 = 1, \quad y = 4 + 1 = 5, \quad z = 3 + 1 = 4$$

に対応する。

$$(2) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$$



9 カ所の中の 7 カ所に🦆を入れて  $({}_9C_7)$   
残りに | を入れればよい

【答】  ${}_9C_7 = 36$  通り

${}_9C_2$  でもよい

$$(2) \quad x + y + z = 10 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$$

(別解) 地道に数えるか…

|             |                      |                      |          |
|-------------|----------------------|----------------------|----------|
| $x = 1$ のとき | $y = 8, 7, \dots, 1$ | $z = 1, 2, \dots, 8$ | の 8 組    |
| $x = 2$ のとき | $y = 7, 6, \dots, 1$ | $z = 1, 2, \dots, 7$ | の 7 組    |
| $x = 3$ のとき | $y = 6, 5, \dots, 1$ | $z = 1, 2, \dots, 6$ | の 6 組    |
| $\vdots$    | $\vdots$             | $\vdots$             | $\vdots$ |
| $x = 8$ のとき | $y = 1$              | $z = 1$              | の 1 組    |

$$\text{よって } 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{\text{公式/等差数列の和}}{2} = \frac{8(1+8)}{2} = 36 \text{ 通り } \boxed{\text{答}}$$

$$(3) \quad x + y + z \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$x + y + z + p \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, p \geq 0) \text{ を考える}$$

---

例えば  のとき  
は  $x = 2, y = 2, z = 4, p = 2$  となり

$$x + y + z + 2 = 10$$

$$x + y + z = 8$$

に対応する。

$$(3) \quad x + y + z \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

 のときは

$x = 1, y = 1, z = 0, p = 8$  となり

$$x + y + z + 8 = 10$$

$$x + y + z = 2$$

に対応する。

$$(3) \quad x + y + z \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

 |  |  |  のときは

$x = 1, y = 3, z = 2, p = 4$  となり

$$x + y + z + 4 = 10$$

$$x + y + z = 6$$

に対応する。

$$(3) \quad x + y + z \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

 |   |        | のときは

$x = 1, y = 2, z = 7, p = 0$  となり

$$x + y + z + 0 = 10$$

$$x + y + z = 10$$

に対応する。

---

つまり  10 個 と | 3 個  
の合計 13 個の並べ方を数えればよい。

$$(3) \quad x + y + z \leq 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$



13 カ所の中の 10 カ所に🦆を入れて  $({}_{13}C_{10})$   
残りに | を入れればよい

答  ${}_{13}C_{10} = 286$  通り

${}_{13}C_3$  でもよい

## まとめると、これでいいのかな？

$$(1)' \quad \underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}_{m \text{ 個}} = n$$

$m, n$  は自然数,  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \cdots, m$ )

を満たす整数解の組は

${}_{n+m-1}C_n$  通り      または       ${}_{n+m-1}C_{m-1}$  通り

まとめると、これでいいのかな？

$$(2)' \quad \underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}_{m \text{ 個}} = n$$

$m, n$  は自然数,  $x_i \geq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

を満たす整数解の組は

${}_{n-1}C_{n-m}$  通り      または       ${}_{n-1}C_{m-1}$  通り

まとめると、これでいいのかな？

$$(3)' \quad \underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}_{m \text{ 個}} \leq n$$

$m, n$  は自然数,  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \cdots, m$ )

を満たす整数解の組は

${}_{n+m}C_n$  通り      または       ${}_{n+m}C_m$  通り