数列の和

次の数列において、初項から第 800 項までの和を求めなさい。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \cdots$$

群数列と考える

$$\frac{1}{2} \,\Big|\, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \,\Big|\, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \,\Big|\, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \,\Big|\, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \cdots$$

第１群　第２群　第３群　第４群　第５群

分母が同じ分数をまとめて群に分ける。

項数は

第 1 群は項が 1 個、第 2 群は項が 2 個、第 3 群は項が 3 個なので第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$ 一旦停止

第 1 群から第 $n-1$ 群までの項数は

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(n-1) &= \frac{1}{2}(n-1)\Big((n-1)+1\Big)\\ &= \frac{1}{2}(n-1)n\end{aligned}$$ 一旦停止

第 800 項は、第何群の第何項？

よって第 800 項が第 n 群にあるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n < \ 800 \ \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$(n-1)n < 1600 \leq n(n+1)$$

$39\cdot40=1560,\ 40\cdot41=1640$ だから上記の式を満たす自然数は $n=40$ である。第 1 群から第 39 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot39\cdot40=780$ なので第 800 項は第 40 群の 20 番目である。

各群の分数の和は

$$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\,\Big|\,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}\,\Big|\,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\,\Big|\,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\cdots$$

第１群　第２群　第３群　第４群　第５群

第 n 群のすべての分数の和は

$$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\quad=\frac{n}{2}$$

一旦停止

よって答えは

よって初項から第 800 項までの和は

$$
\begin{aligned}
&\quad \text{第 39 群までの和} &&+ \text{第 40 群の第 20 項までの和}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{39}{2} &&+ \frac{1}{41}(1+2+3+\cdots+20)\\
&= \frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+39) &&+ \frac{1}{41}\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40 &&+ \frac{210}{41}\\
&= 390 &&+ \frac{210}{41} = \frac{16200}{41} \quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}
$$