数学的帰納法

ある事柄が、自然数 n について必ず成り立つことを証明するには

❶ $n=1$ のとき成り立つ

❷ $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、
$n=k+1$ のときも成り立つ

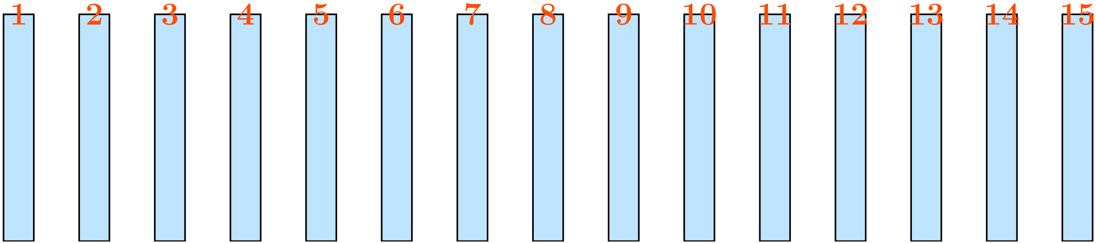
の 2 つのことを示せばよい。

ドミノ倒し　【クリックで再描画】

❶ 1 番目が倒れる

❷ あるコマが倒れると、次のコマも倒れる

このとき ⇒ 全部のコマが倒れる



$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ …① を示せ。n: 自然数

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ …① を示せ。n: 自然数

❶ $n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= 1+3+5+\cdots+(2\times 1-1) \\
&= 1+3+5+\cdots+(\ 2-1\ ) \\
&= 1\cancel{+3+5+\cdots+\quad 1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

（最後が 1 ということはココはいらない）

❶ $n=1$ のとき

$$\text{右辺}=n^2=1^2=1$$

よって $n=1$ のとき①は成り立つ。
（左辺も右辺も $=1$ になるから）

❷ $n=k$ のとき成り立つと仮定する。つまり
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ を仮定する。

問題に書いてある式
$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ で
$n \to k$ と置き換える。

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ …① を示せ。n: 自然数

$n=k+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= 1+3+5+\cdots \qquad +(2n-1) \\
&= \overset{1}{1}+\overset{2}{3}+\overset{3}{5}+\cdots+(2\overset{k}{k}-1)+(2\overset{k+1}{(k+1)}-1) \\
&= \text{さっき仮定した⇒}\ k^2 + 2k+2-1 \\
&= k^2 + 2k+1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

一旦停止

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ …① を示せ。n: 自然数

$n=k+1$ のとき

$$右辺 = n^2 = (k+1)^2$$

一旦停止

よって $n=k+1$ のときも①は成り立つ。
（左辺も右辺も $=(k+1)^2$ になるから）

❶ , ❷ より、すべての自然数 n について①は成り立つ。【証明終わり】

$n=1$ のとき成り立つので $n=2$ のときも成り立つ
$n=2$ のとき成り立つので $n=3$ のときも成り立つ
$n=3$ のとき成り立つので $n=4$ のときも成り立つ
$n=4$ のとき成り立つので $n=5$ のときも成り立つ
⋮