

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = 16a_n^3$
($n = 1, 2, \dots$) を満たすものとする。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ とするとき、 $\{b_n\}$ の一般項を a と n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a と n を用いて表せ。
- (3) すべての n について $a_n = a$ を満たすような a の値を求めよ。

$$\log_{\star}(\blacksquare \times \blacktriangle) = \log_{\star} \blacksquare + \log_{\star} \blacktriangle$$

$$\log_{\star} \blacktriangle^{\circ} = \circ \log_{\star} \blacktriangle$$

$a_1 > 0$ で $a_{n+1} = 16a_n^3$ より $\{a_n\}$ はすべて正の数である。 ※ 当然 \log_2 を計算することになるので

漸化式の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2(16a_n^3)$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 16 + \log_2 a_n^3$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2^4 + 3 \log_2 a_n$$

特性方程式だよ

$$\log_{\star} \triangle^{\circ} = \bullet \log_{\star} \triangle$$

$$\log_{\star} \star = 1$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2^4 + 3 \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = 4 \log_2 2 + 3 \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = 4 + 3 \log_2 a_n$$

$b_n = \log_2 a_n$ とすると $b_{n+1} = 3b_n + 4 \cdots \textcircled{1}$ だ。

$\textcircled{1}$ の変形は**特性方程式**と呼ばれ $\beta = 3\beta + 4 \cdots \textcircled{2}$ を解くと $\beta = -2$ となる。 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ を計算すると

特性方程式

$$b_{n+1} = 3b_n + 4$$

$$-)\quad \beta = 3\beta + 4$$

$$b_{n+1} - \beta = 3b_n - 3\beta$$

$$b_{n+1} - \beta = 3(b_n - \beta)$$

さっき $\beta = -2$ だったので $b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$ となる。

等比数列の公式に持ち込めた

$$b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$$

数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = \log_2 a + 2$, 公比 3
の等比数列だから

$$b_n + 2 = (\log_2 a + 2) \cdot 3^{n-1}$$

$$b_n = (\log_2 a + 2) \cdot 3^{n-1} - 2 \quad \boxed{\text{答}}$$

$\log_2 2 = 1$ を使って式を細工する

$b_n = \log_2 a_n$ だったので、この式を指数の書き方でかくと $a_n = 2^{b_n}$ となるから、(1)の答えを代入して

$$a_n = 2^{b_n}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + 2) \cdot 3^{n-1} - 2}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + 2) \cdot 3^{n-1}} \cdot 2^{-2}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + 2 \log_2 2) \cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\bullet \log_{\star} \blacktriangle = \log_{\star} \blacktriangle^{\circ}$$

$$\log_{\star} \blacksquare + \log_{\star} \blacktriangle = \log_{\star} (\blacksquare \times \blacktriangle)$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + 2 \log_2 2)} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + \log_2 2^2)} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + \log_2 4)} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 4a)} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\star^{\circ} \times \triangle = (\star^{\circ})^{\triangle}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 4a) \cdot 3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = (2^{\log_2 4a})^{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$



$2^{\log_2 4a}$ をシンプルに表したい

$x = 2^{\log_2 4a}$ において両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 x = \log_2 2^{\log_2 4a}$$

$$\log_2 x = \log_2 4a \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 x = \log_2 4a$$

よって $x = 4a$ となるので、元に戻って

たぶんこれが模範解答として発表されたのだろう…

$$a_n = \left(2^{\log_2 4a}\right)^{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4} \quad \boxed{\text{答}}$$

$$a_n = 2^{(\log_2 a + 2) \cdot 3^{n-1} - 2} \quad \boxed{\text{答}} \quad \text{じゃダメなのかな?}$$

(3)を解きます

$$a_2 = 16a_1^3 = 16a^3 \text{ となる。}$$

すべての n について $a_n = a$ となるためには
 $a_2 = a$ であることが必要だから $16a^3 = a$

$$\text{因数分解して } a(4a + 1)(4a - 1) = 0$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4} \quad \text{でしたよね}$$

逆に $a = \frac{1}{4}$ のとき(2)の結果から

$$a_n = \frac{1^{3^{n-1}}}{4} = \frac{1}{4} = a$$

となり、すべての n について $a_n = a$ を満たす。

よって $a = \frac{1}{4}$ 答