

03 佐賀大

$\triangle ABC$ の重心を G とし、 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ とするとき

- (1) \overrightarrow{BG} を \vec{a} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $BP : PA = 2 : 3$ となる点 P を辺 AB 上にとり、直線 PG と直線 BC が交わる点を Q とする。 \overrightarrow{BQ} を \vec{c} を用いて表せ。

誘導問題とは

大問の場合は

- (1) を使って (2) を解く
- (2) を使って (3) を解く

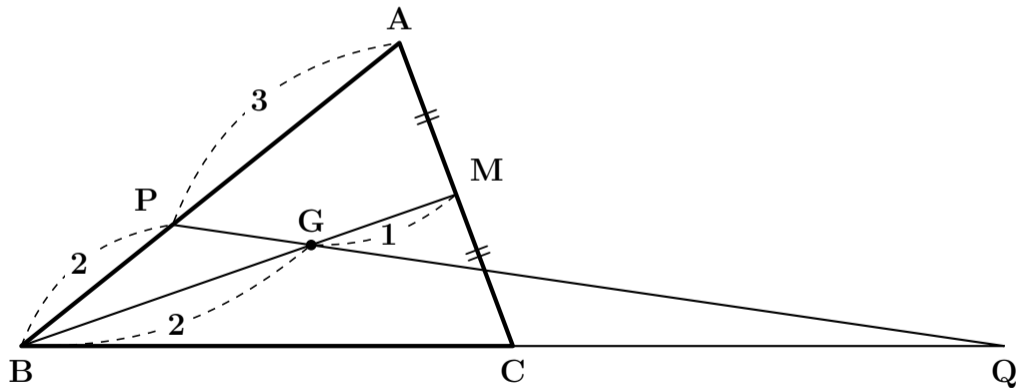
とか

- (1) をヒントにして (2) を解く
- (2) をヒントにして (3) を解く

が、よくあるので覚えておきましょう。

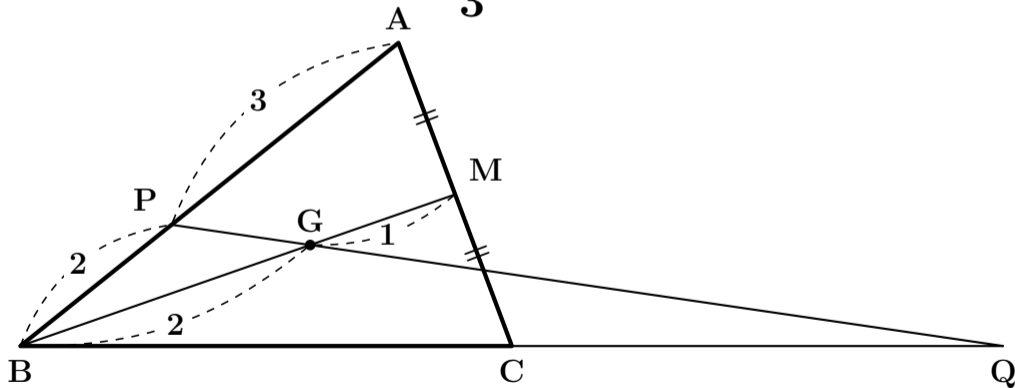
辺 AC の中点を M とすると

G は重心なので $BG : GM = 2 : 1$ になる



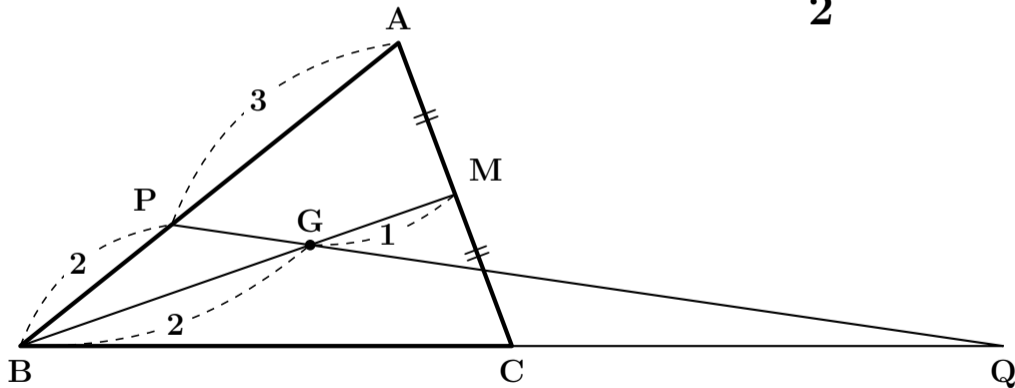
辺 AC の中点を M とすると

よって $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BM}$ になる



辺 AC の中点を M とすると

また M は中点なので $\vec{BM} = \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{2}$ だ

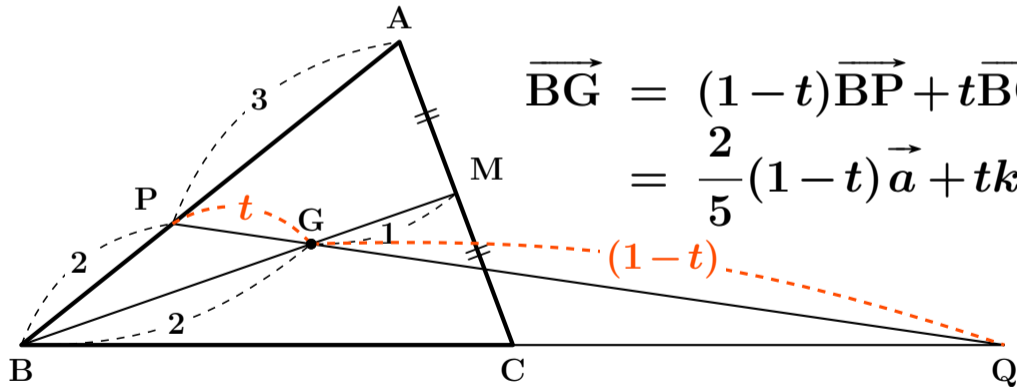


よってこうなる

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{BM} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}}{3} \quad \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

次に(2)を解きます

$PG:GQ=t:(1-t)$, $\overrightarrow{BQ}=k\vec{c}$ (t, k は実数)とおくと



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= (1-t)\overrightarrow{BP} + t\overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{2}{5}(1-t)\vec{a} + tk\vec{c}\end{aligned}$$

(1)を使って(2)を解くパターンだよ

\overrightarrow{BG} は(1)でも求めたので

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}}{3} = \frac{2}{5}(1-t)\overrightarrow{a} + tk\overrightarrow{c}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c} = \frac{2}{5}(1-t)\overrightarrow{a} + tk\overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{c}$ なので

\vec{a} , \vec{c} それぞれの係数を比較して

$$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{2}{5}(1-t)\vec{a} + tk\vec{c}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{5}(1-t), \quad \frac{1}{3} = tk$$

これを解いて $t = \frac{1}{6}$, $k = 2$ となる。

よって $\overrightarrow{BQ} = 2\vec{c}$ 答