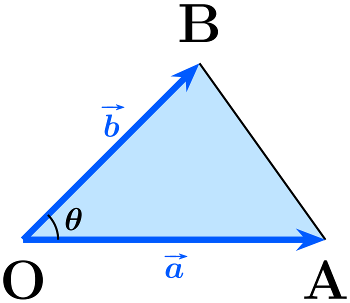
三角形の面積 S（ベクトル）



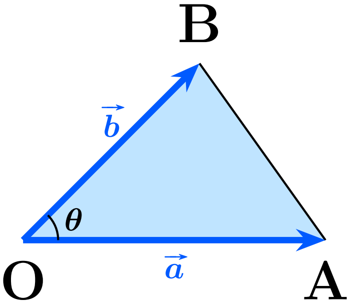
数学 I で三角形の面積公式

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin A$ を学習した。

これをベクトルの表記でかくと

$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ となる。

三角形の面積 S（ベクトル）



次に公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を変形して

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

しかし $0° < \theta < 180°$ のとき $\sin\theta > 0$ なので、上の式は

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$　だよ

よって　$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$x=\sqrt{x^2}$ なので（ただし $x>0$）

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$$

式の変形をしていくと

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\left(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right)^2}$$

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ なので

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　だよ

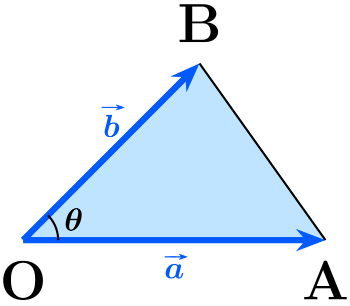
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

まとめると（この公式を使う機会はほとんどないと思うが…）

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

成分表示で考えると



$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ とすると

$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$ （ベクトルの成分と大きさ）

$|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ （内積と成分）

だから

さっきの公式を変形したい

$$
\begin{aligned}
&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\
&= ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2 \\
&= {a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2+{a_2}^2{b_1}^2 \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)^2
\end{aligned}
$$

上の式の両辺のルートをとって

$\sqrt{x^2}=|x|$ となるので

$$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|a_1b_2-a_2b_1|$$ なので

$$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|a_1b_2-a_2b_1|$$

さっきの

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

に代入して（この公式は重要です！）

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

頂点が $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,-1), \mathrm{B}(4,2)$ の三角形の面積？

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(4,2)$ なので

$$S=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$$

に代入して

$$S=\frac{1}{2}\left|3\times 2-(-1)\times 4\right|=5$$ $\boxed{\text{答}}$

頂点が $\mathrm{P}(1,0), \mathrm{Q}(-2,-1), \mathrm{R}(-1,3)$ の三角形の面積？

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (-2-1\ ,\ -1-0) = (-3, -1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (-1-1\ ,\ 3-0) = (-2, 3)$$

なので

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|}$$

に代入して

$$S = \frac{1}{2}\left|-3\times 3 - (-1)\times(-2)\right| = \frac{11}{2}$$ 答