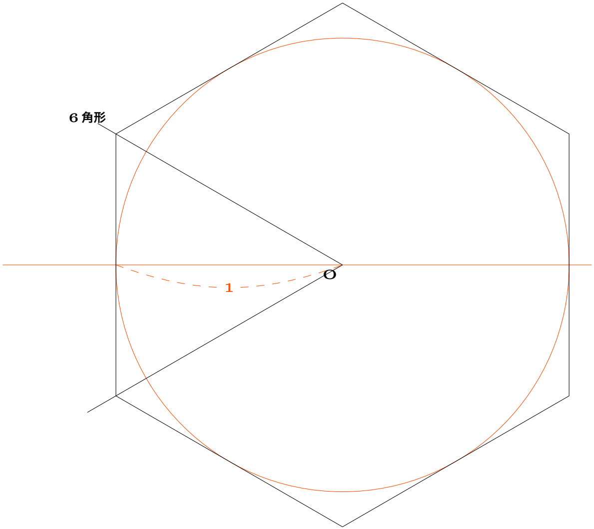
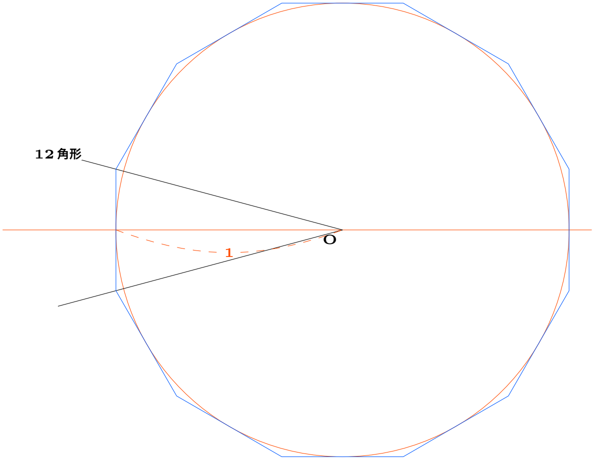
アルキメデスが　$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　を計算した方法



$\pi < 3\frac{1}{7}$　の証明をする。

半径 1 の円に外接する正多角形を考える。

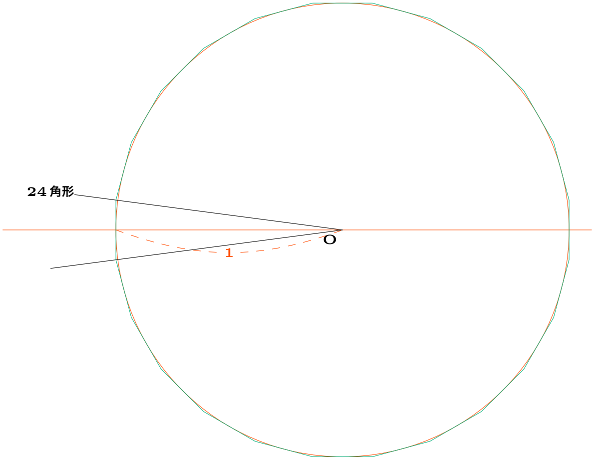
アルキメデスが　$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　を計算した方法



$\pi < 3\frac{1}{7}$　の証明をする。

半径 1 の円に外接する正多角形を考える。

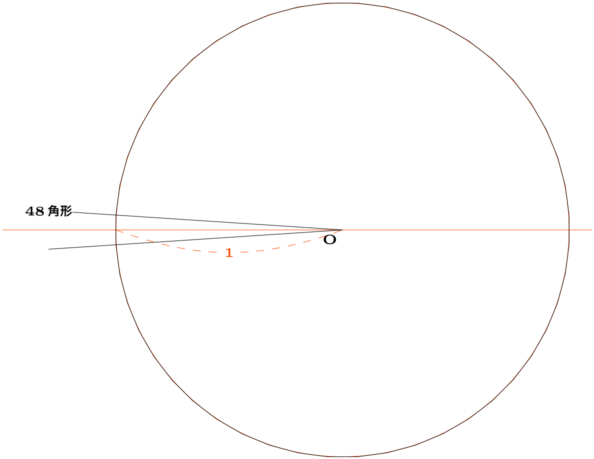
アルキメデスが $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を計算した方法



$\pi < 3\frac{1}{7}$ の証明をする。

半径 1 の円に外接する正多角形を考える。

アルキメデスが　$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　を計算した方法



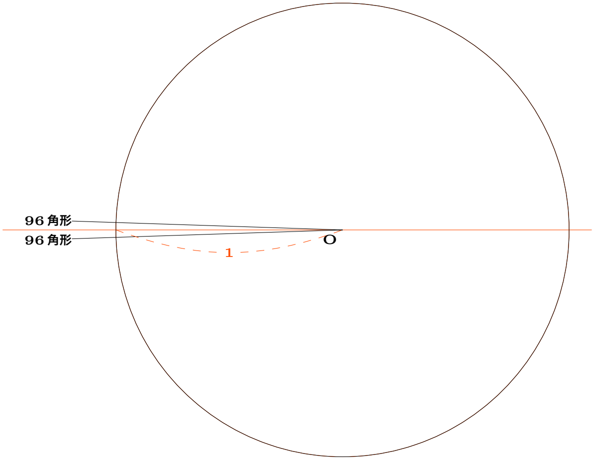
$\pi < 3\frac{1}{7}$　の証明をする。

半径 1 の円に外接する正多角形を考える。

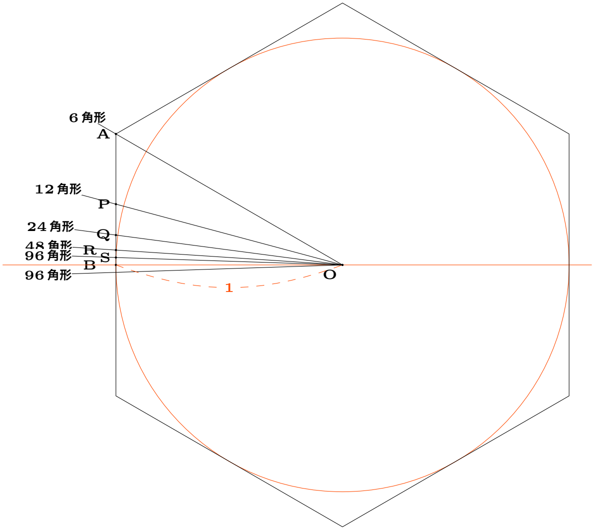
アルキメデスが　$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　を計算した方法

$\pi < 3\frac{1}{7}$　の証明をする。

半径 1 の円に外接する正多角形を考える。



アルキメデスが　$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　を計算した方法



長さ BS の 2 倍が正 96 角形の一辺の長さだから、正 96 角形の周の長さは $\mathrm{BS} \times 2 \times 96$ で求められる。

円周の長さは 2π なので

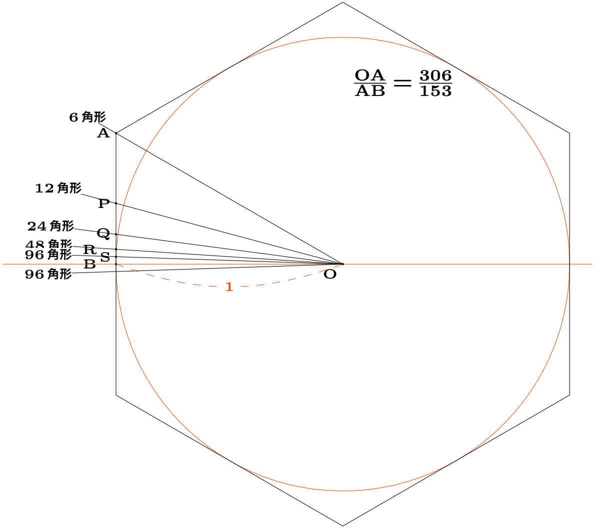
$$2\pi < \text{正 96 角形の周の長さ}$$

$$\pi < \frac{\text{正 96 角形の周の長さ}}{2}$$

で π のおよその値が分かる。

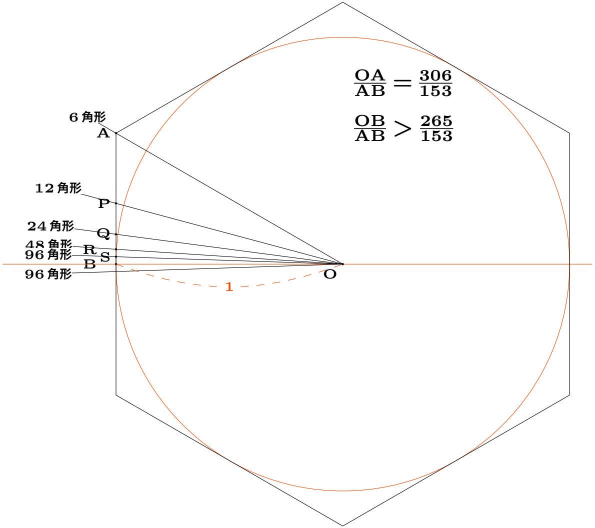
BS を計算しよう。

正 6 角形の計算



$\angle AOB=30^\circ$, $\angle ABO=90^\circ$ より $\triangle ABO$ は三角定規の三角形だから $AB:OA=1:2$ となって $\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{306}{153}$ とおく。

こうおくと、次からの計算がうまくいくのでアルキメデスがこのようにしたそうです。



△ABO で三平方の定理を使って

$$AB^2 + OB^2 = OA^2$$

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{OB^2}{AB^2} = \frac{OA^2}{AB^2}$$

$$1 + \frac{OB^2}{AB^2} = \frac{306^2}{153^2}$$

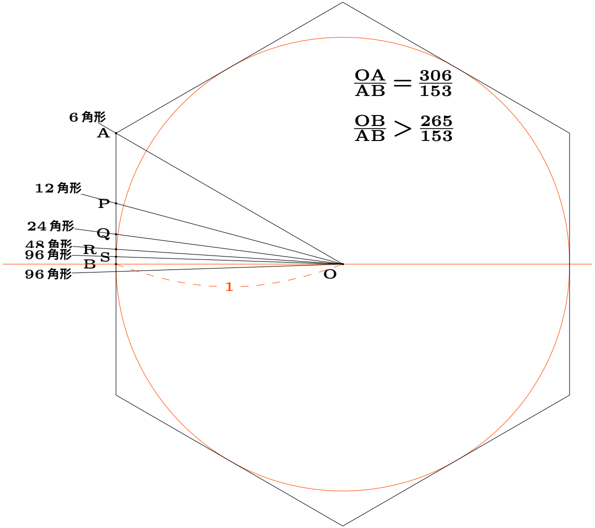
$$\frac{OB^2}{AB^2} = \frac{306^2}{153^2} - \frac{153^2}{153^2}$$

$$\frac{OB^2}{AB^2} = \frac{306^2 - 153^2}{153^2}$$

$$\frac{OB^2}{AB^2} = \frac{70227}{153^2} > \frac{70225}{153^2} = \frac{265^2}{153^2}$$

よって $\frac{OB}{AB} > \frac{265}{153}$ 一旦停止

正 12 角形の計算



OP は $\angle AOB$ の二等分線なので、中学校で習った二等分線の公式より $OA:OB = AP:BP$ となる。分数式でかくと $\frac{OA}{OB} = \frac{AP}{BP}$ となり

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AP}{BP}$$

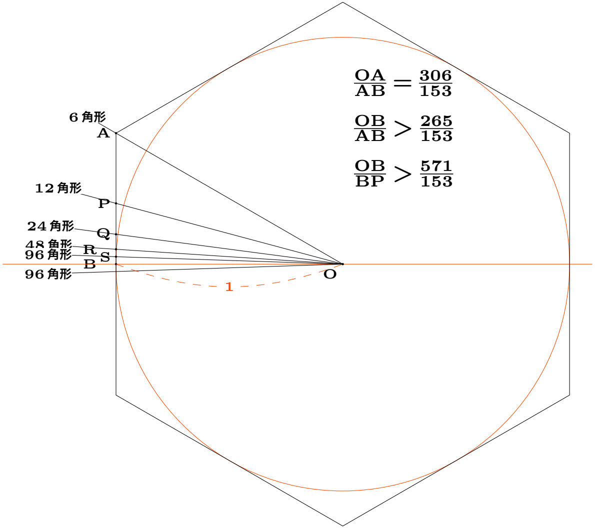
$$\frac{OA}{OB} + 1 = \frac{AP}{BP} + 1$$

$$\frac{OA}{OB} + \frac{OB}{OB} = \frac{AP}{BP} + \frac{BP}{BP}$$

$$\frac{OA+OB}{OB} = \frac{AP+BP}{BP}$$

$$\frac{OA+OB}{OB} = \frac{AB}{BP}$$

正 12 角形の計算



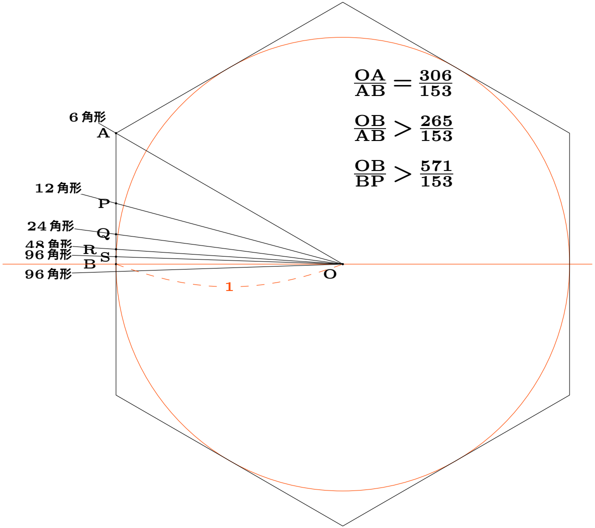
$$\frac{OA+OB}{OB} = \frac{AB}{BP}$$

この式は $\frac{OA+OB}{AB} = \frac{OB}{BP}$ と変形できて、左辺・右辺を入れ替えて

$$\begin{aligned}\frac{OB}{BP} &= \frac{OA+OB}{AB} \\ &= \frac{OA}{AB} + \frac{OB}{AB} \\ &> \frac{306}{153} + \frac{265}{153} \\ &= \frac{571}{153}\end{aligned}$$

よって $\frac{OB}{BP} > \frac{571}{153}$ 一旦停止

次の計算のための準備



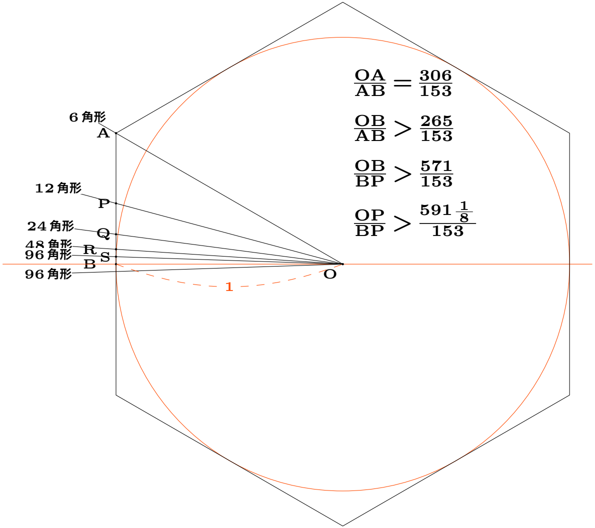
△PBO で三平方の定理を使って

$$OP^2 = OB^2 + BP^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{OP^2}{BP^2} &= \frac{OB^2}{BP^2} + \frac{BP^2}{BP^2} \\
&= \left(\frac{OB}{BP}\right)^2 + 1 \\
&> \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{571^2}{153^2} + \frac{153^2}{153^2} \\
&= \frac{571^2 + 153^2}{153^2} \\
&= \frac{349450}{153^2} > \frac{(591\frac{1}{8})^2}{153^2}
\end{aligned}$$

なので

次の計算のための準備



$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}} = \frac{306}{153}$$

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}} > \frac{265}{153}$$

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BP}} > \frac{571}{153}$$

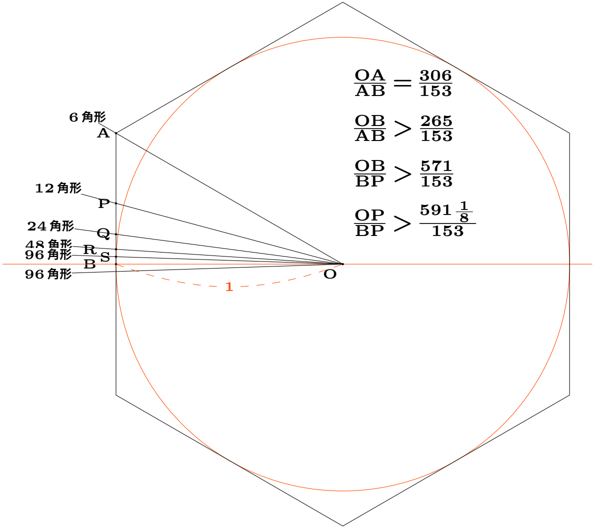
$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BP}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{\mathrm{OP}^2}{\mathrm{BP}^2} > \frac{(591\frac{1}{8})^2}{153^2}$$ になって

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BP}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

一旦停止

正 24 角形の計算



OQ は ∠POB の二等分線なので、
二等分線の公式より
OP : OB = PQ : BQ となる。
分数式でかくと $\frac{OP}{OB}=\frac{PQ}{BQ}$ となり

$$\frac{OP}{OB}=\frac{PQ}{BQ}$$

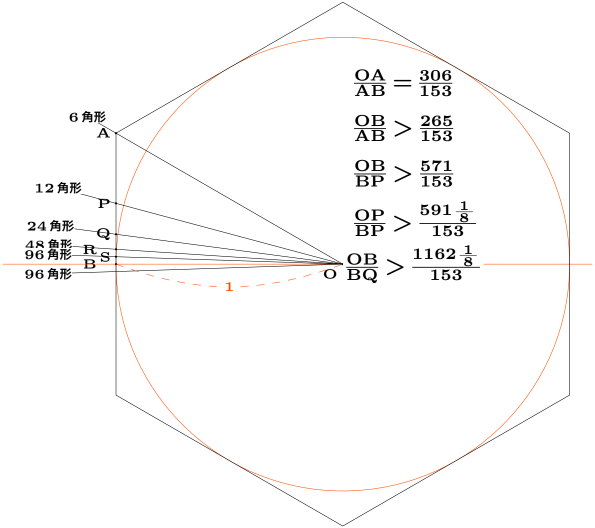
$$\frac{OP}{OB}+1=\frac{PQ}{BQ}+1$$

$$\frac{OP}{OB}+\frac{OB}{OB}=\frac{PQ}{BQ}+\frac{BQ}{BQ}$$

$$\frac{OP+OB}{OB}=\frac{PQ+BQ}{BQ}$$

$$\frac{OP+OB}{OB}=\frac{BP}{BQ}$$

正 24 角形の計算



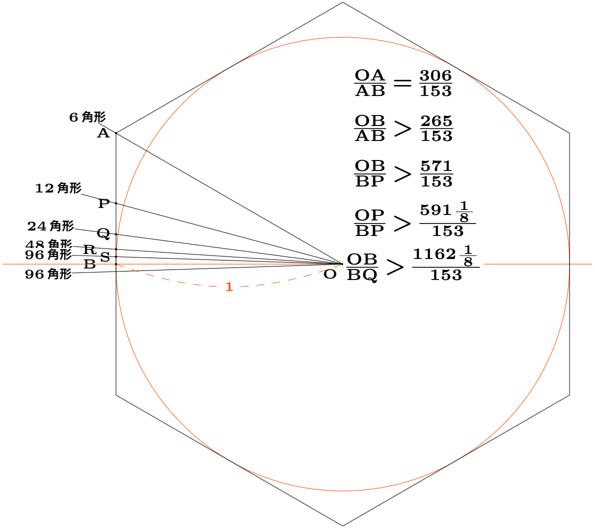
$$\frac{OP+OB}{OB}=\frac{BP}{BQ}$$

この式は $\frac{OP+OB}{BP}=\frac{OB}{BQ}$ と変形できて、左辺・右辺を入れ替えて

$$\begin{aligned}\frac{OB}{BQ}&=\frac{OP+OB}{BP}\\&=\frac{OP}{BP}+\frac{OB}{BP}\\&>\frac{591\frac{1}{8}}{153}+\frac{571}{153}\\&=\frac{1162\frac{1}{8}}{153}\end{aligned}$$

よって $\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$ 一旦停止

次の計算のための準備



$$\frac{OA}{AB}=\frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB}>\frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP}>\frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

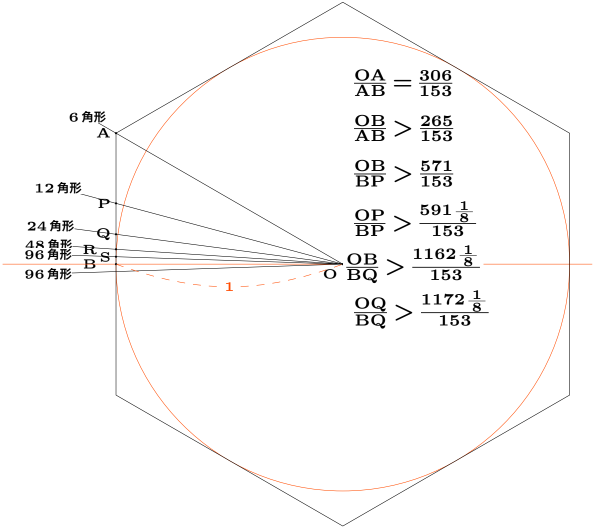
△QOB で三平方の定理を使って

$$OQ^2=OB^2+BQ^2$$

$$\begin{aligned}\frac{OQ^2}{BQ^2}&=\frac{OB^2}{BQ^2}+\frac{BQ^2}{BQ^2}\\&=\left(\frac{OB}{BQ}\right)^2+1\\&>\left(\frac{1162\frac{1}{8}}{153}\right)^2+1\\&=\frac{(1162\frac{1}{8})^2}{153^2}+\frac{153^2}{153^2}\\&=\frac{1373943\frac{33}{64}}{153^2}>\frac{(1172\frac{1}{8})^2}{153^2}\end{aligned}$$

なので

次の計算のための準備



$$\frac{OA}{AB} = \frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB} > \frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP} > \frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

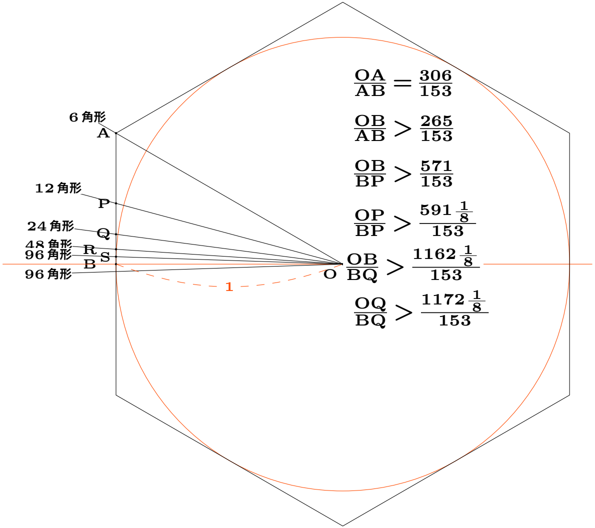
$$\frac{OQ}{BQ} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$\dfrac{OQ^2}{BQ^2} > \dfrac{(1172\frac{1}{8})^2}{153^2}$ になって

$$\frac{OQ}{BQ} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

一旦停止

正 48 角形の計算



$$\frac{OA}{AB}=\frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB}>\frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP}>\frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OQ}{BQ}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

OR は $\angle$QOB の二等分線なので、二等分線の公式より OQ : OB = QR : BR となる。分数式でかくと $\frac{OQ}{OB}=\frac{QR}{BR}$ となり

$$\frac{OQ}{OB}=\frac{QR}{BR}$$

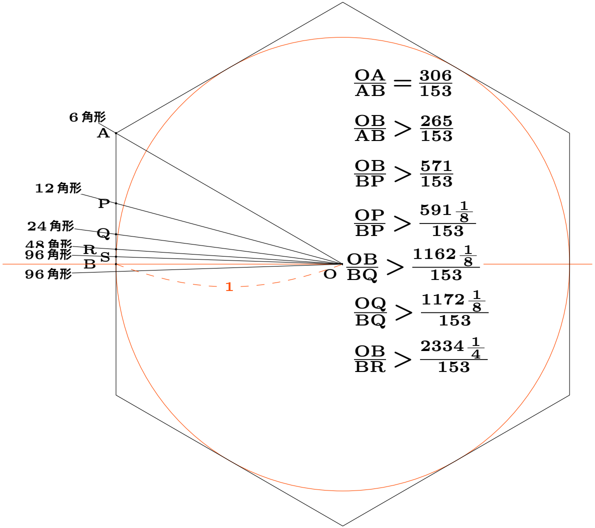
$$\frac{OQ}{OB}+1=\frac{QR}{BR}+1$$

$$\frac{OQ}{OB}+\frac{OB}{OB}=\frac{QR}{BR}+\frac{BR}{BR}$$

$$\frac{OQ+OB}{OB}=\frac{QR+BR}{BR}$$

$$\frac{OQ+OB}{OB}=\frac{BQ}{BR}$$

正 48 角形の計算



$$\frac{OA}{AB} = \frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB} > \frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP} > \frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OQ}{BQ} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BR} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OQ+OB}{OB} = \frac{BQ}{BR}$$

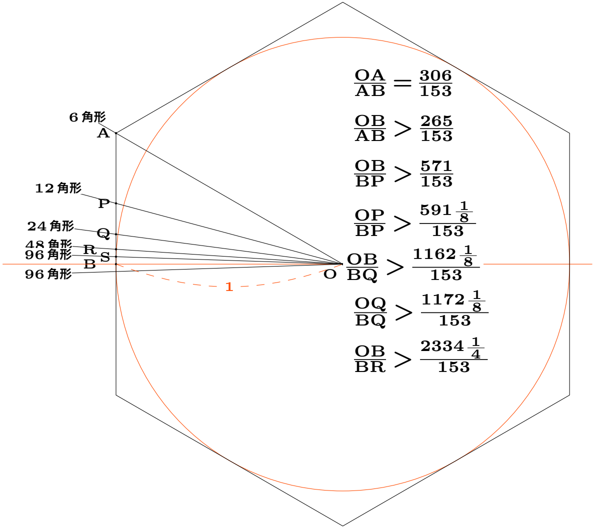
この式は $\dfrac{OQ+OB}{BQ} = \dfrac{OB}{BR}$ と変形できて、左辺・右辺を入れ替えて

$$\begin{aligned}\frac{OB}{BR} &= \frac{OQ+OB}{BQ}\\ &= \frac{OQ}{BQ} + \frac{OB}{BQ}\\ &> \frac{1172\frac{1}{8}}{153} + \frac{1162\frac{1}{8}}{153}\\ &= \frac{2334\frac{1}{4}}{153}\end{aligned}$$

よって $\dfrac{OB}{BR} > \dfrac{2334\frac{1}{4}}{153}$

一旦停止

次の計算のための準備



$$\frac{OA}{AB}=\frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB}>\frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP}>\frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OQ}{BQ}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BR}>\frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$\triangle$ROB で三平方の定理を使って

$$OR^2=OB^2+BR^2$$

$$\frac{OR^2}{BR^2}=\frac{OB^2}{BR^2}+\frac{BR^2}{BR^2}$$

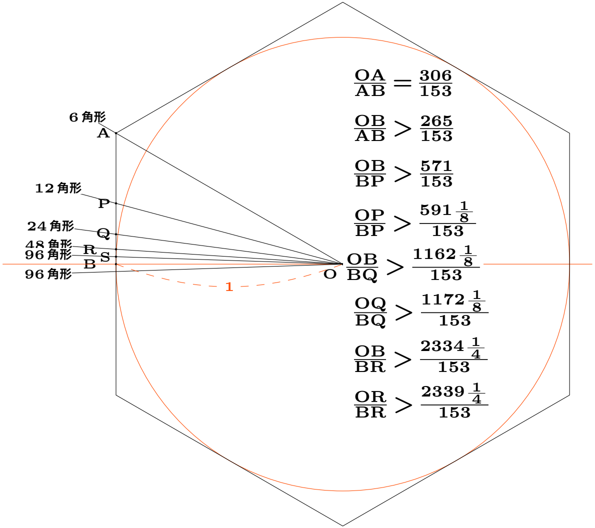
$$=\left(\frac{OB}{BR}\right)^2+1$$

$$>\left(\frac{2334\frac{1}{4}}{153}\right)^2+1$$

$$=\frac{(2334\frac{1}{4})^2}{153^2}+\frac{153^2}{153^2}$$

$$=\frac{5472132\frac{1}{16}}{153^2}>\frac{(2339\frac{1}{4})^2}{153^2}$$ なので

次の計算のための準備



$$\frac{OA}{AB}=\frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB}>\frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP}>\frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OQ}{BQ}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

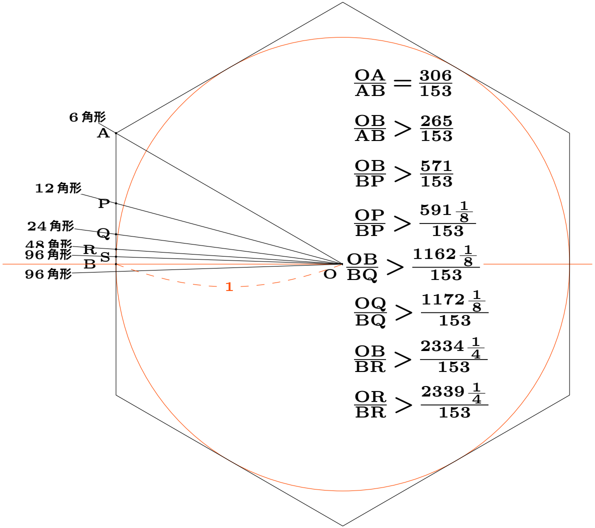
$$\frac{OB}{BR}>\frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OR}{BR}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OR^2}{BR^2}>\frac{(2339\frac{1}{4})^2}{153^2}$$ になって

$$\frac{OR^2}{BR^2}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$ 一旦停止

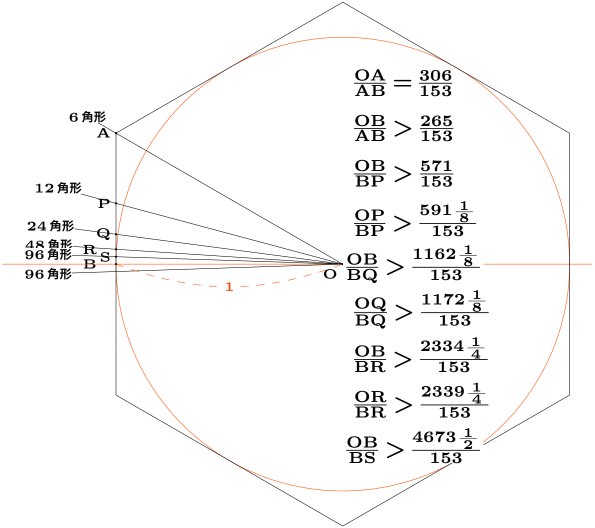
正 96 角形の計算



OS は $\angle$ROB の二等分線なので、二等分線の公式より OR:OB = RS:BS となる。分数式でかくと $\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BS}}$ となり

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BS}}$$
$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}} + 1 = \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BS}} + 1$$
$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}} + \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{BS}} + \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{BS}}$$
$$\frac{\mathrm{OR}+\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{RS}+\mathrm{BS}}{\mathrm{BS}}$$
$$\frac{\mathrm{OR}+\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BS}}$$

正 96 角形の計算



$$\frac{OA}{AB}=\frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB}>\frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP}>\frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OQ}{BQ}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BR}>\frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OR}{BR}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OB}{BS}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

$$\frac{OR+OB}{OB}=\frac{BR}{BS}$$

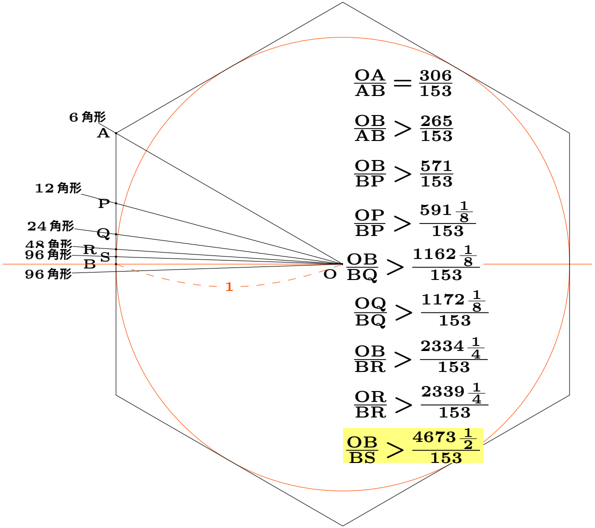
この式は $\dfrac{OR+OB}{BR}=\dfrac{OB}{BS}$ と変形できて、左辺・右辺を入れ替えて

$$\begin{aligned}\frac{OB}{BS}&=\frac{OR+OB}{BR}\\&=\frac{OR}{BR}+\frac{OB}{BR}\\&>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}+\frac{2334\frac{1}{4}}{153}\\&=\frac{4673\frac{1}{2}}{153}\end{aligned}$$

よって $\dfrac{OB}{BS}>\dfrac{4673\frac{1}{2}}{153}$

一旦停止

やっと π の値が見えてきた



$$\frac{OA}{AB}=\frac{306}{153}$$

$$\frac{OB}{AB}>\frac{265}{153}$$

$$\frac{OB}{BP}>\frac{571}{153}$$

$$\frac{OP}{BP}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BQ}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OQ}{BQ}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{OB}{BR}>\frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OR}{BR}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OB}{BS}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

$OB=1$ なので $\frac{1}{BS}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$ となって、逆数をとると大小関係が逆転するから $BS<\frac{153}{4673\frac{1}{2}}$ になる。

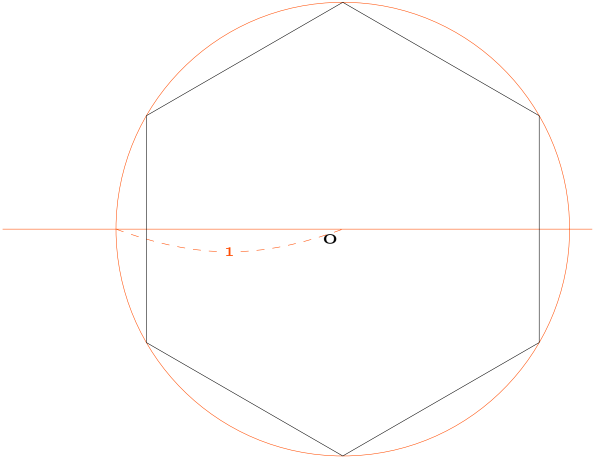
$$\pi<\frac{96\text{ 角形の周の長さ}}{2}=\frac{2\times BS\times 96}{2}$$

$$<\frac{2\times\frac{153}{4673\frac{1}{2}}\times 96}{2}=\frac{153}{4673\frac{1}{2}}\times 96$$

$$=\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}=3\,\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$

$$<3\,\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}=3\,\frac{1}{7}\quad\boxed{\text{答}}$$

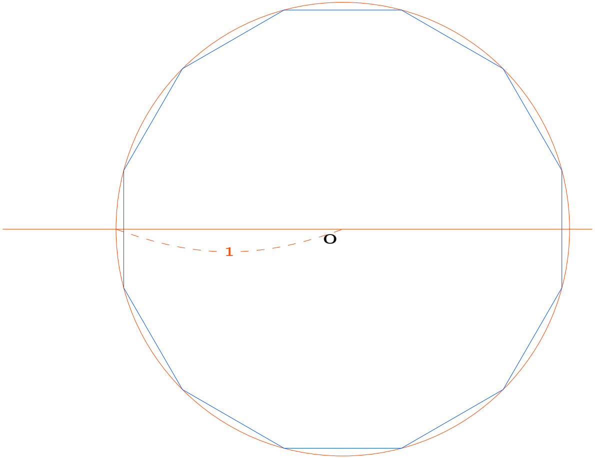
内接する正多角形を考えると



次に $\pi > 3\,\frac{10}{71}$ を証明しよう。

内接する正 6 角形

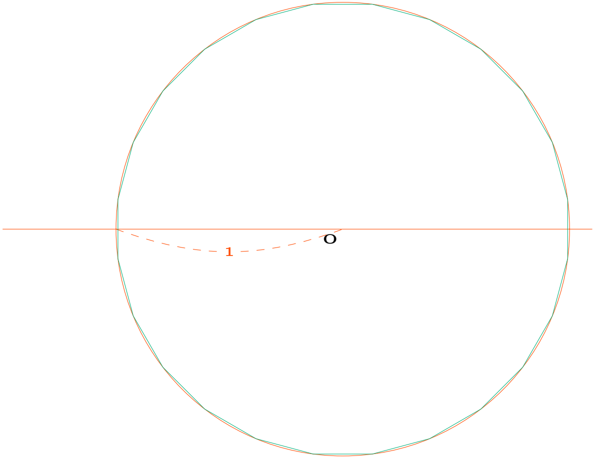
内接する正多角形を考えると



次に $\pi > 3\,\frac{10}{71}$ を証明しよう。

内接する正 12 角形

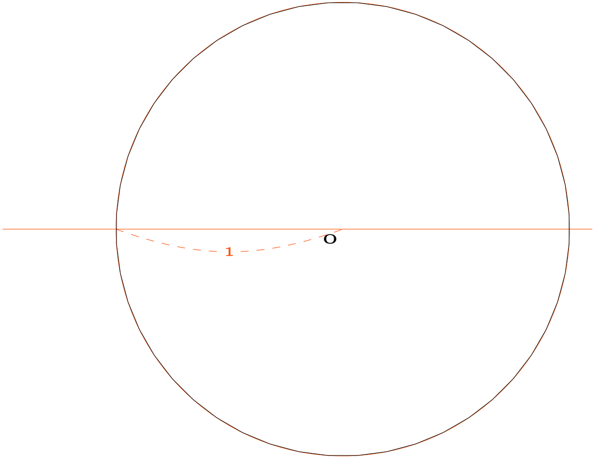
内接する正多角形を考えると



次に $\pi > 3\frac{10}{71}$ を証明しよう。

内接する正 24 角形

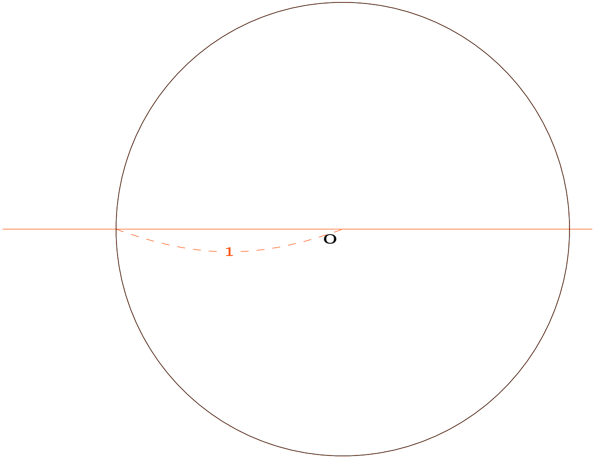
内接する正多角形を考えると



次に $\pi > 3\frac{10}{71}$ を証明しよう。

内接する正 48 角形

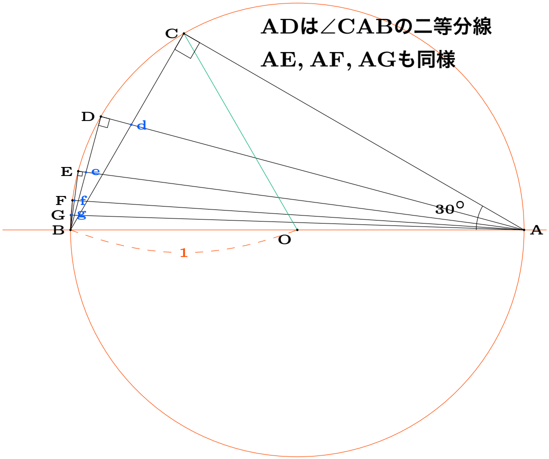
内接する正多角形を考えると



次に $\pi > 3\,\dfrac{10}{71}$ を証明しよう。

内接する正 96 角形

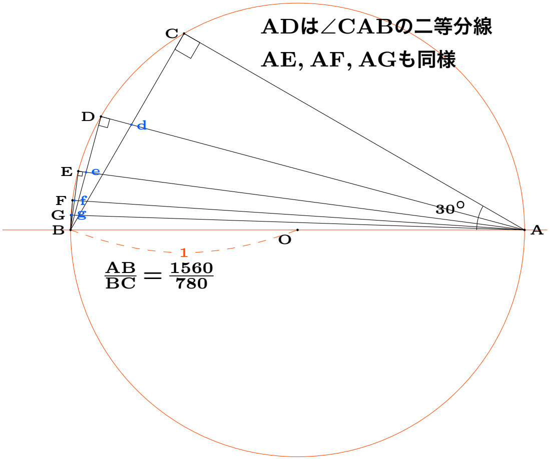
$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



中心角は、円周角の 2 倍なので $\angle COB = 60^\circ$ になるから、辺 CB は内接する正 6 角形の一辺の長さとなる。

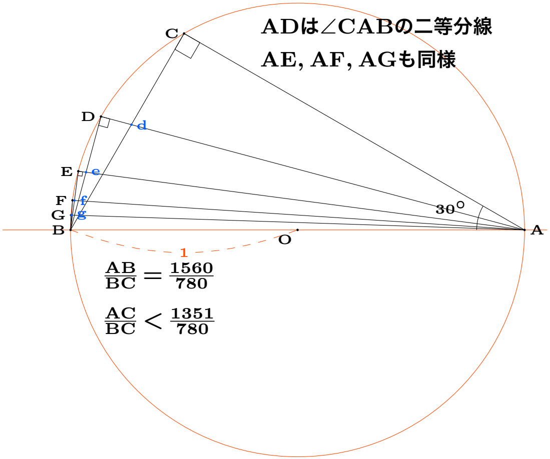
同様に BG が内接する正 96 角形の一辺となるので、BG の長さを計算しよう。

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$\triangle ABC$ は直角定規の三角形だから $BC:AB = 1:2$ となって $\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$ とおく。

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

△ABC で三平方の定理を使って

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$1 + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{BC^2}$$

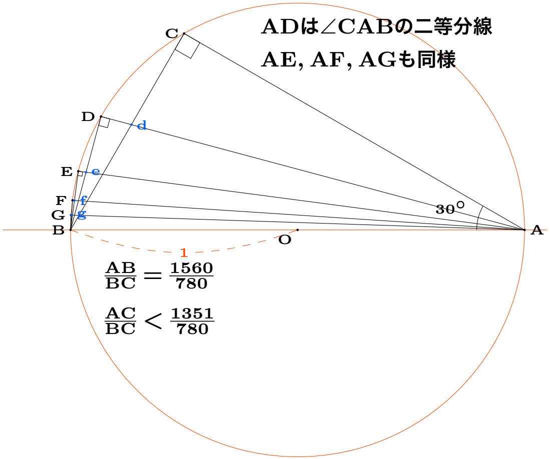
$$\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{1560^2}{780^2} - \frac{780^2}{780^2}$$

$$\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{1825200}{780^2}$$

$$< \frac{1351^2}{780^2}$$

よって $\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$ 一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$\triangle ADB \backsim \triangle BDd \backsim \triangle ACd$ を証明する。AB は円の直径なので

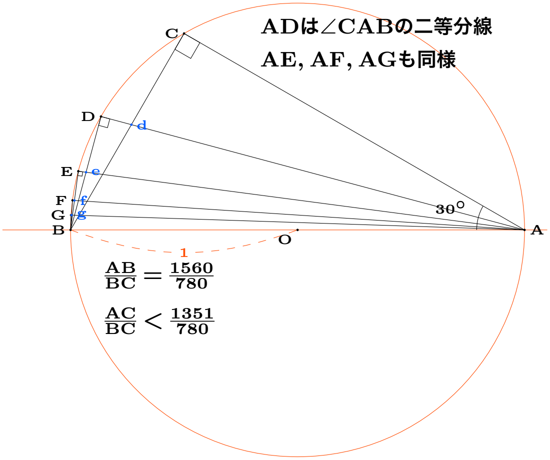
$\angle ADB = \angle BDd = \angle ACd = 90°$

AD は二等分線なので
$\angle DAB = \angle CAd = 15°$

ともに弧 CD の円周角なので
$\angle CAd = \angle DBd$

対応する 2 つの角がそれぞれ等しいので相似である。

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



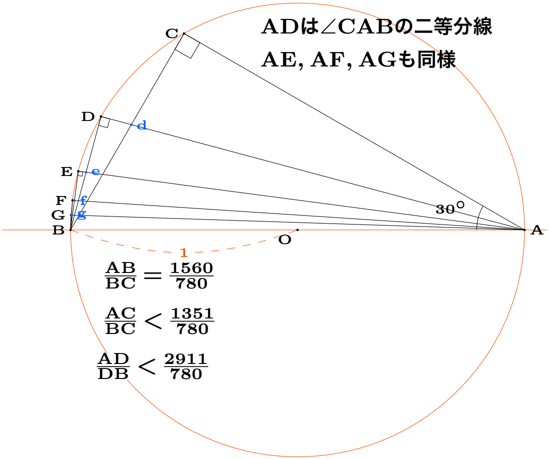
よって

$$\begin{aligned} &AD : DB \\ &= DB : Dd \\ &= AC : Cd \\ &= AB : Bd \quad \text{(AD はニ等分線だから)} \\ &= (AB + AC) : (Cd + Bd) \end{aligned}$$

より

$$AD : DB = (AB + AC) : BC$$

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



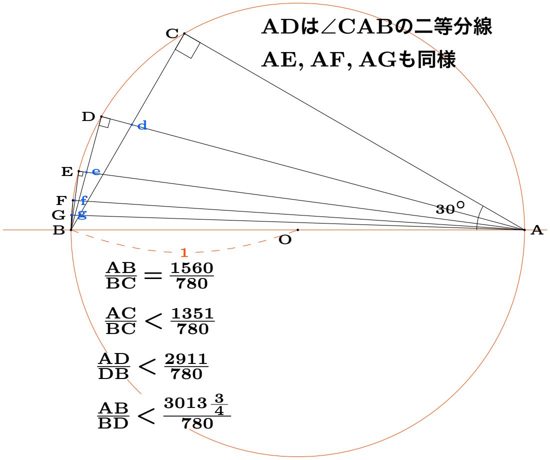
$$AD : DB = (AB + AC) : BC$$

分数式でかくと $\frac{AD}{DB} = \frac{AB+AC}{BC}$ となり

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}$$
$$< \frac{1560}{780} + \frac{1351}{780}$$
$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

△ABD で三平方の定理を使って

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

$$\frac{AB^2}{BD^2} = 1 + \frac{AD^2}{BD^2}$$

$$< \frac{780^2}{780^2} + \frac{2911^2}{780^2}$$

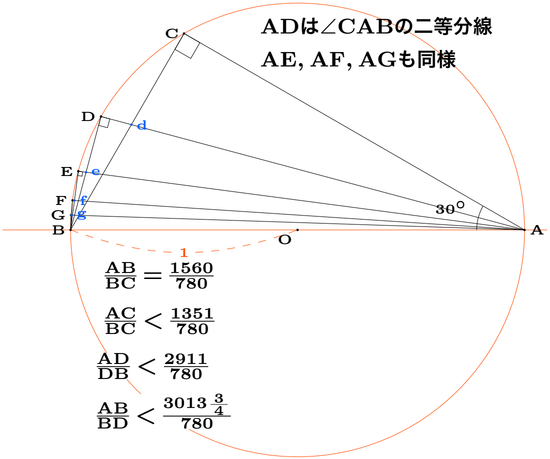
$$= \frac{9082321}{780^2}$$

$$< \frac{(3013\frac{3}{4})^2}{780^2}$$

よって $\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

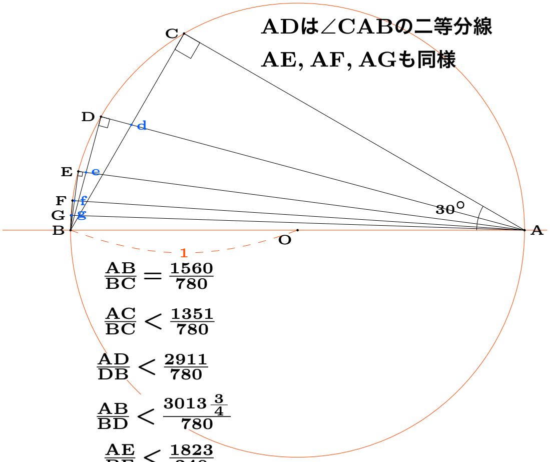
$\triangle AEB \backsim \triangle BEe \backsim \triangle ADe$ より

$$
\begin{aligned}
&AE : EB \\
&= BE : Ee \\
&= AD : De \\
&= AB : Be \quad \text{(AE はニ等分線だから)} \\
&= (AB + AD) : (De + Be)
\end{aligned}
$$

より

$$AE : EB = (AB + AD) : BD$$

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$AE : BE = (AB + AD) : BD$$

分数式でかくと $\frac{AE}{BE} = \frac{AB+AD}{BD}$ となり

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BD} + \frac{AD}{BD}$$

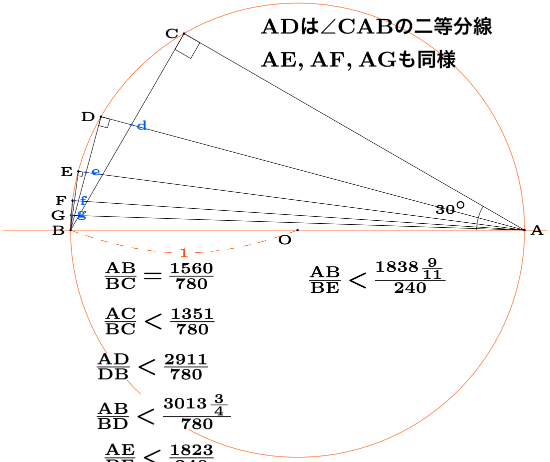
$$\frac{AE}{BE} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780} + \frac{2911}{780}$$

$$= \frac{5924\frac{3}{4} \times \frac{4}{13}}{780 \times \frac{4}{13}}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

△ABE で三平方の定理を使って

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

$$\frac{AB^2}{BE^2} = 1 + \frac{AE^2}{BE^2}$$

$$\frac{AB^2}{BE^2} < \frac{240^2}{240^2} + \frac{1823^2}{240^2}$$

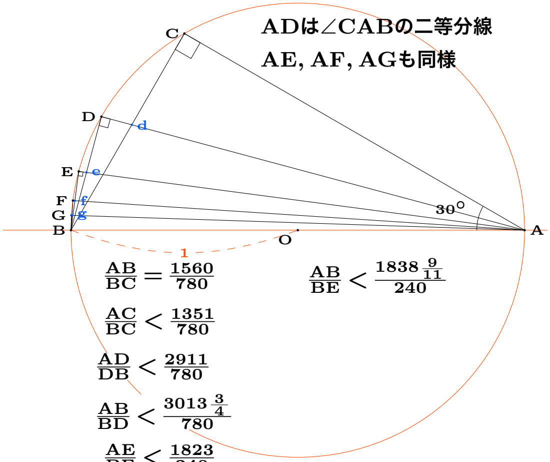
$$= \frac{3380929}{240^2}$$

$$\frac{AB^2}{BE^2} < \frac{(1838\frac{9}{11})^2}{240^2}$$

よって $\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

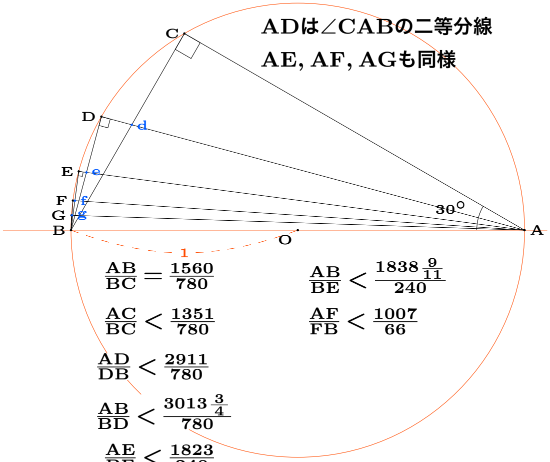
$\triangle AFB \backsim \triangle BFf \backsim \triangle AEf$ より

$$\begin{aligned} &AF:FB \\ &= BF:Ff \\ &= AE:Ef \\ &= AB:Bf \quad \text{(AF はニ等分線だから)} \\ &= (AB+AE):(Ef+Bf) \end{aligned}$$

より

$$AF:FB = (AB+AE):BE$$

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} < \frac{1007}{66}$$

$$\mathrm{AF} : \mathrm{FB} = (\mathrm{AB} + \mathrm{AE}) : \mathrm{BE}$$

分数式でかくと $\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}$ となり

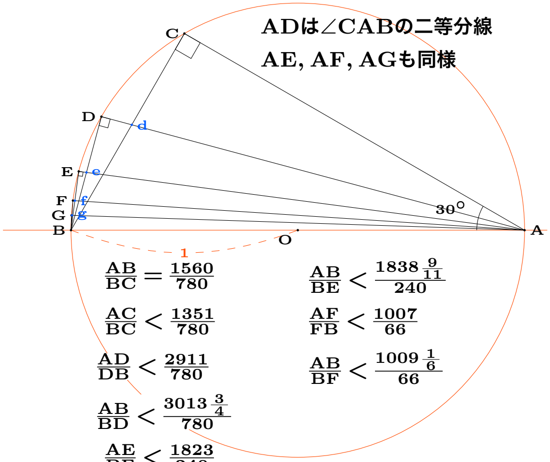
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} + \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}$$

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240} + \frac{1823}{240}$$

$$= \frac{3661\frac{9}{11} \times \frac{11}{40}}{240 \times \frac{11}{40}}$$

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} < \frac{1007}{66}$$

一旦停止



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$\frac{AF}{FB} < \frac{1007}{66}$$

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

△ABF で三平方の定理を使って

$$AB^2 = BF^2 + AF^2$$

$$\frac{AB^2}{BF^2} = 1 + \frac{AF^2}{BF^2}$$

$$\frac{AB^2}{BF^2} < \frac{66^2}{66^2} + \frac{1007^2}{66^2}$$

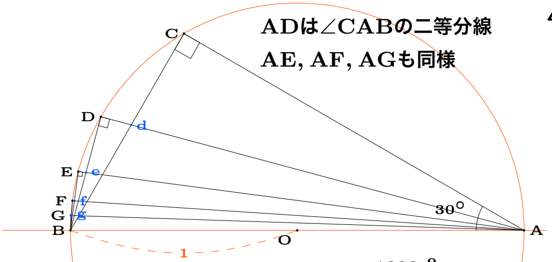
$$= \frac{1018405}{66^2}$$

$$\frac{AB^2}{BF^2} < \frac{(1009\frac{1}{6})^2}{66^2}$$

よって $\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$\frac{AF}{FB} < \frac{1007}{66}$$

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{AG}{GB} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

△AGB ∽ △BGg ∽ △AFg より
AG : GB = (AB + AF) : BF なので分数式でかくと $\frac{AG}{GB} = \frac{AB+AF}{BF}$ となり

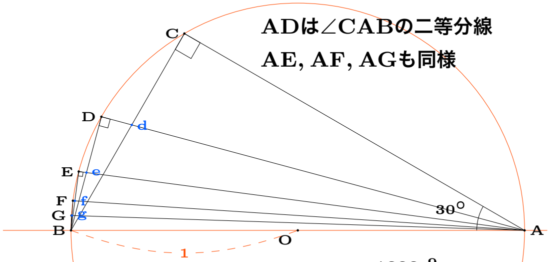
$$\frac{AG}{GB} = \frac{AB}{BF} + \frac{AF}{BF}$$

$$\frac{AG}{GB} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66} + \frac{1007}{66}$$

$$\frac{AG}{GB} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$\frac{AF}{FB} < \frac{1007}{66}$$

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{AG}{GB} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{AB}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

△ABG で三平方の定理を使って

$$AB^2 = BG^2 + AG^2$$

$$\frac{AB^2}{BG^2} = 1 + \frac{AG^2}{BG^2}$$

$$\frac{AB^2}{BG^2} < \frac{66^2}{66^2} + \frac{(2016\frac{1}{6})^2}{66^2}$$

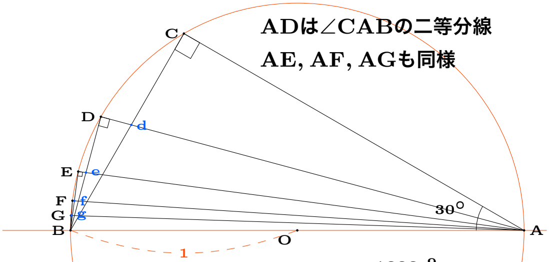
$$= \frac{4069284\frac{1}{36}}{66^2}$$

$$< \frac{(2017\frac{1}{4})^2}{66^2}$$

よって $\dfrac{AB}{BG} < \dfrac{2017\frac{1}{4}}{66}$

一旦停止

$3\frac{10}{71} < \pi$ の解説



$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}$$

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1823}{240}$$

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$\frac{AF}{FB} < \frac{1007}{66}$$

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{AG}{GB} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{AB}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

AB＝2 なので $\frac{2}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$ となって、逆数をとると大小関係が逆転するから $\frac{BG}{2} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$ になる。

$$\pi > \frac{96\text{ 角形の周の長さ}}{2} = \frac{BG\times 96}{2}$$

$$> \frac{66}{2017\frac{1}{4}} \times 96 = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{6336}{\frac{8069}{4}} = \frac{25344}{8069} = 3\frac{1137}{8069}$$

$$= 3\frac{1137}{\frac{80690}{10}} > 3\frac{1137}{\frac{80727}{10}} = 3\frac{10\times\frac{1137}{10}}{71\times\frac{1137}{10}}$$

$$= 3\frac{10}{71} \quad \boxed{答}$$

参考 URL

https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/archimedes-circle ▸ web

http://media.bloomsbury.com/rep/files/primary-source-13-archimedes-measurement-of-a-circle.pdf ▸ web