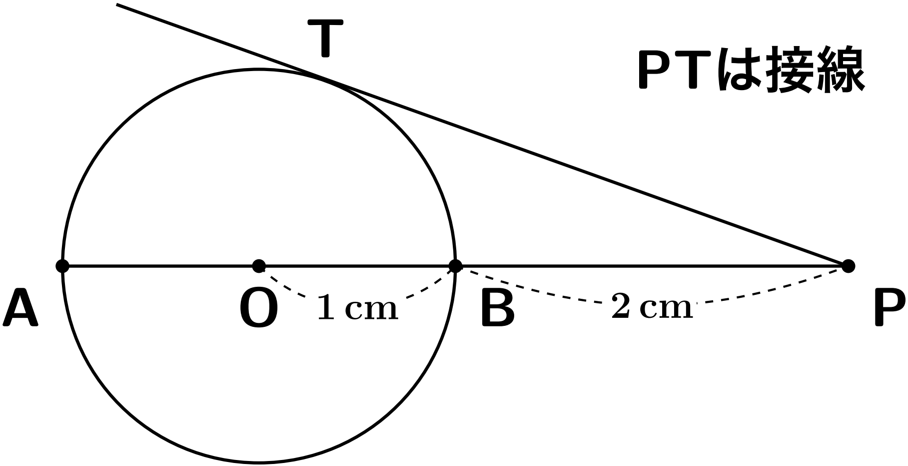
次の問いに答えなさい



問い

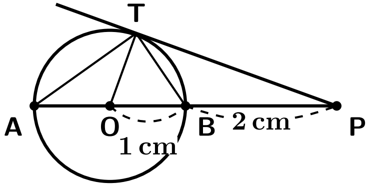
⑴ $\angle OTP$, $\angle ATB$ の大きさをそれぞれ求めなさい。

⑵ PT の長さを求めなさい。

⑶ $\triangle ATP \backsim \triangle TBP$ を証明しなさい。

⑷ AT の長さを求めなさい。

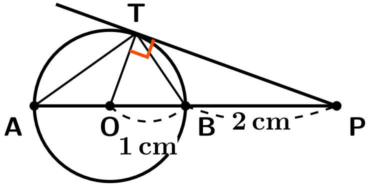
(1)　$\angle$OTP, $\angle$ATB の大きさ？



(1)　∠OTP, ∠ATB の大きさ？

PT は接線なので

$$\angle \mathrm{OTP} = 90^\circ$$ 答



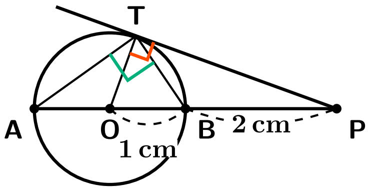
(1)　∠OTP, ∠ATB の大きさ？

PT は接線なので

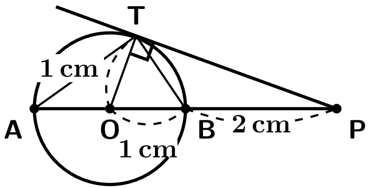
$$\angle \mathrm{OTP} = 90^\circ$$ 答

AB は直径なので

$$\angle \mathrm{ATB} = 90^\circ$$ 答

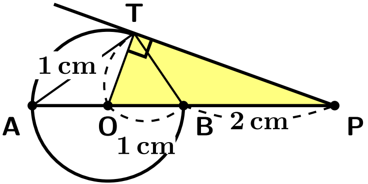


⑵　PT の長さを求めなさい



⑵　PT の長さを求めなさい

OT は半径なので 1 cm だから、
三平方の定理を使って



$$1^2 + \mathrm{PT}^2 = 3^2$$

$$\mathrm{PT}^2 = 8$$

PT > 0 より　$$\mathrm{PT} = \sqrt{8}$$

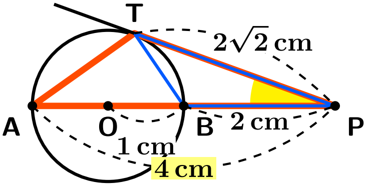
$$\mathrm{PT} = 2\sqrt{2}$$ 答

(3)　△ATP ∽ △TBP を証明しなさい

(1), (2), (3),… のような問題は

(1)を使って(2)を解く

(2)を使って(3)を解く



場合があるので、(2)で PT $= 2\sqrt{2}$ を答えさせたことを考えると、三角形の相似条件 web の

2 組の辺の比が等しく、その間の角度が等しい

が使えそう。

(3)　△ATP ∽ △TBP を証明しなさい

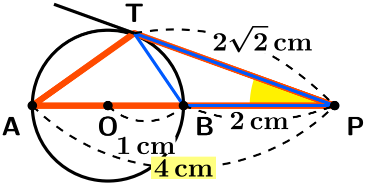
△ATP と △TBP で

$\mathrm{TP} : \mathrm{BP} = 2\sqrt{2} : 2 = \sqrt{2} : 1$ 一旦停止

$\mathrm{AP} : \mathrm{TP} = 4 : 2\sqrt{2} = 2 : \sqrt{2}$

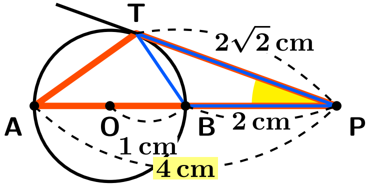
$= \sqrt{2}^{2} : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$ 一旦停止

よって　$\mathrm{TP} : \mathrm{BP} = \mathrm{AP} : \mathrm{TP}$　…①



(3)　△ATP ∽ △TBP を証明しなさい

△ATP と △TBP で



$\mathrm{TP}:\mathrm{BP} = 2\sqrt{2}:2 = \sqrt{2}:1$ 一旦停止

$\mathrm{AP}:\mathrm{TP} = 4:2\sqrt{2} = 2:\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}^{2}:\sqrt{2} = \sqrt{2}:1$ 一旦停止

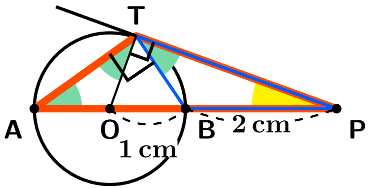
よって　$\mathrm{TP}:\mathrm{BP} = \mathrm{AP}:\mathrm{TP}$　…①

共通な角だから　$\angle\mathrm{APT} = \angle\mathrm{TPB}$　…②

①, ②より、2 組の辺の比が等しく、その間の角度が等しいので　△ATP ∽ △TBP　【証明終わり】

⑶　△ATP ∽ △TBP の証明（別解）

△ATP と △TBP で



$$\angle \mathrm{OTA} + \angle \mathrm{OTB} = 90^\circ$$
$$\angle \mathrm{PTB} + \angle \mathrm{OTB} = 90^\circ$$

よって $\angle \mathrm{OTA} = \angle \mathrm{PTB}$　…①

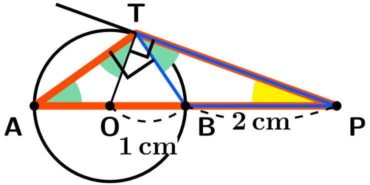
△OTA は二等辺三角形だから $\angle \mathrm{OTA} = \angle \mathrm{OAT}$　…②

①, ②より $\angle \mathrm{OAT} = \angle \mathrm{PTB}$　…③

⑶　△ATP ∽ △TBP の証明（別解）

共通な角だから

$\angle APT = \angle TPB$　…④



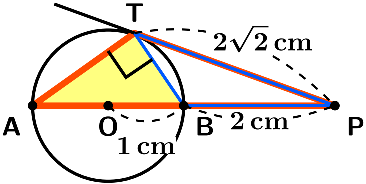
③, ④より 2 組の角がそれぞれ等しいので

△ATP ∽ △TBP　【証明終わり】

(4)　AT の長さを求めなさい

△ATP と △TBP の相似比は $\sqrt{2}:1$
なので BT $= x$ とすると AT $= \sqrt{2}\,x$
となって三平方の定理より

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{2}x)^2 + x^2 &= 2^2 \\
2x^2 + x^2 &= 4 \\
3x^2 &= 4 \\
x^2 &= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$



(4)　AT の長さを求めなさい

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

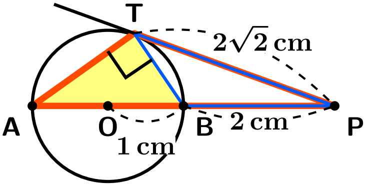
【 $x > 0$ より 】

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

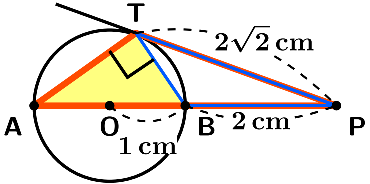
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

一旦停止



(4)　AT の長さを求めなさい

$\mathrm{AT} = \sqrt{2}\,\mathrm{BT} = \sqrt{2}\,x$ だったので



$$\mathrm{AT} = \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$ 答