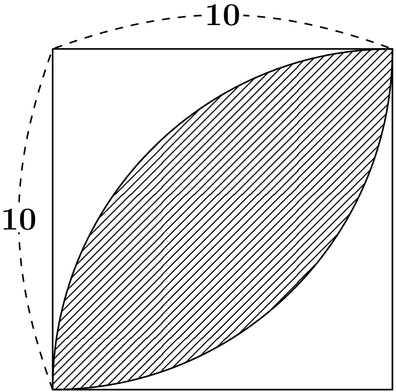
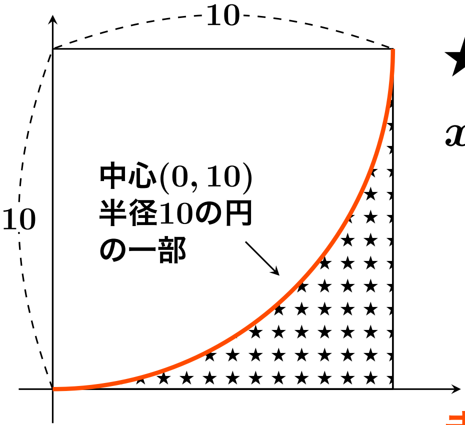
面積を求めなさい



面積を求めなさい

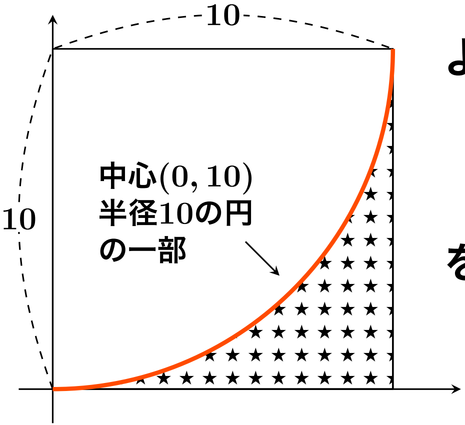


★部分の面積を求めます。

$$
\begin{aligned}
x^2+(y-10)^2 &= 10^2 \\
(y-10)^2 &= 100-x^2 \\
y-10 &= \pm\sqrt{100-x^2} \\
y &= \pm\sqrt{100-x^2}+10
\end{aligned}
$$

赤線は $y=-\sqrt{100-x^2}+10$

面積を求めなさい



よって

$$\int_0^{10}\left(-\sqrt{100-x^2}+10\right)dx$$

を求める。

面積を求めなさい

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{10}\left(-\sqrt{100-x^2}+10\right)dx \\
&= -\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx+\int_0^{10}10\,dx \\
&= -\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx+10\int_0^{10}dx
\end{aligned}
$$

一旦停止

分けて計算します。

まず後ろの　$10\int_0^{10} dx$

$$
\begin{aligned}
10\int_0^{10} dx &= 10\left[x\right]_0^{10} \\
&= 10\,(10-0) \\
&= 100
\end{aligned}
$$

一旦停止

次に前の $-\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx$ を計算

$x=10\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおいて置換積分する。

$\dfrac{dx}{d\theta}=10\cos\theta$ なので $dx=10\cos\theta\,d\theta$ となる。

また x が $0\to10$ のとき θ は $0\to\frac{\pi}{2}$ となるので

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx\\
=\ &-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100-(10\sin\theta)^2}\cdot10\cos\theta\,d\theta\\
=\ &-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100-100\sin^2\theta}\cdot10\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

次に前の $-\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx$ を計算

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100-100\sin^2\theta}\cdot 10\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100\,(1-\sin^2\theta)}\cdot 10\cos\theta\,d\theta$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100\cos^2\theta}\cdot 10\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(10\cos\theta)^2}\cdot 10\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}10\cos\theta\cdot 10\cos\theta\,d\theta$$

次に前の $-\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx$ を計算

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 10\cos\theta \cdot 10\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 100\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -100\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -100\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

2 倍角公式（半角公式）

$$= -\frac{100}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

次に前の $-\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx$ を計算

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{100}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= -50\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= -50\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -50\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

次に前の $-\int_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx$ を計算

$$= -50\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right)\right)$$

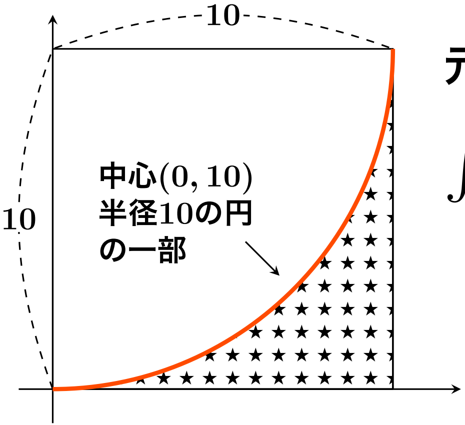
$$= -50\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right)$$

$$= -50\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right)-\left(0+\frac{0}{2}\right)\right)$$

$$= -50\cdot\frac{\pi}{2} \qquad = -25\pi$$

一旦停止

面積を求めなさい

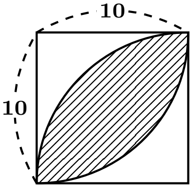


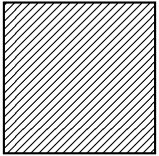
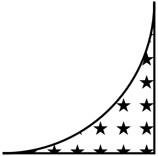
元に戻って、★部分の面積は

$$\int_0^{10}\left(-\sqrt{100-x^2}+10\right)dx$$

$$= -25\pi+100$$

一旦停止



$=$  $- \ 2\times$ 

$$= 100 - 2(-25\pi + 100)$$

$$= 100 + 50\pi - 200$$

$$= 50\pi - 100 \quad \boxed{\text{答}}$$

小学生向け

https://unilab.gbb60166.jp/prekou/pdf/shushoku_menseki_Ver4.pdf ▸ web